# 工程控制論

錢學森著

科學出版社

# 工 程 控 制 論

錢 學 森 著

戴 汝 爲
何 善 堉 譯



科 學 出 版 社

H. S. TSIEN

ENGINEERING CYBERNETICS

McGraw-Hill Publishing Company Ltd.
New York London Toronto

## 內 容 簡 介

本書的目的是把一般性概括性的理論和實際工程經驗很好的結合起來，對工程技術各個系統的自動控制和自動調節理論作一個全面的探討．它一方面奠定了工程控制論這門技術科學的理論基礎，另一方面指出這門新學科今後的幾個研究方向．

本書最初是用英文寫的．現在的漢文版是在錢學森先生本人的指導下，翻譯英文版並且參照俄文譯本略加修改和補充而成．

本書曾榮獲中國科學院 1956 年度一等科學獎金．

# 工 程 控 制 論

錢 學 森 著
戴汝為　何善堉譯

*

科 學 出 版 社 出 版 (北京朝陽門大街 117 號)
北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號

科學出版社上海印刷廠印刷　新華書店總經售

*

1958年 8 月第 一 版　　書號：1296　字數：831,000
1958年 8 月第一次印刷　　開本：787×1092 1/18
(滬)：0001—1,954　　印張：14

定價：(10)2.20 元

# 漢 文 版 序

本書原來是用英文寫的，當時作者尚在美國，生活不安定，所以寫得很粗糙，也沒有能够引入非常重要的蘇聯文獻. 理當重寫一遍，補正這些缺點，但是現在工作忙，尚無暇及此. 可是祖國的自動化事業在黨的領導下正飛速發展，工程控制論這門學科還是需要介紹. 解決這樣一個矛盾的辦法是：請戴汝為同何善堉兩位同志根據作者 1956 年春季在中國科學院力學研究所講工程控制論的筆記，在譯英文版的基礎上加以補充. 今年工程控制論的俄譯本也出版了，俄譯本編校人費爾德包姆(А. А. Фельдбаум)很耐心地收集了有關的蘇聯文獻，加註到譯文裏. 漢譯者就利用了這些文獻，在適當的地方用[…]來加註，其中數字相當於書後俄文文獻的號數. 作者和漢譯者希望就這樣初步地補正英文版的一些缺點.

錢學森

1957 年 8 月於北京

# 原　　序

著名的法國物理學家和數學家安培(A. M. Ampère)曾經給關於國務管理的科學取了一個名字——控制論(Cybernétique)[安培著:"論科學的哲學"(Essai sur la philosophie des sciences)第二部,1845年,巴黎出版]. 安培企圖建立這樣一門政治科學的龐大計劃並沒有得到結果,而且,恐怕永遠也不會有結果. 可是,在這些年代中,各國之間的戰爭却大大地促進了另一個科學部門的發展,這就是關於機械系統與電氣系統的控制與操縱的科學. 維納(N. Wiener)就借用安培所創造的名稱"控制論"來稱呼這門新的科學,然而,這門科學却是對於現代化戰爭非常重要的. 這眞是有些諷刺意味的. 維納的控制論(Cybernetics)["控制論——關於動物體和機器的控制與聯系的科學"("Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine" John Wiley & Sons, Inc., New York, 1948)]是關於怎樣把機械元件與電氣元件組合成穩定的並且具有特定的性能的系統的科學. 這門新科學的一個非常突出的特點就是完全不考慮能量,熱量和效率等因素,可是在其他各門自然科學中這些因素却是十分重要的. 控制論所討論的主要問題是一個系統的各個不同部分之間的相互作用的定性性質,以及整個系統的總的運動狀態.

工程控制論的目的是研究控制論這門科學中能够直接用在工程上設計被控制系統或被操縱系統的那些部分. 因此,通常在關於伺服系統的書裏所討論的那些問題當然都包括在工程控制論的範圍之內. 但是,工程控制論比伺服系統工程內容更爲廣泛這一事實,只是二者之間的一個表面的區別,一個更深刻的,因而也是更重要的區別在於:工程控制論是一門技術科學,而伺服系統工程却是一種工程實踐. 技術科學的目的是把工程實際中所用的許多設計原則加以整理與總結,使之成爲理論,因而也就把工程實際的各個不同領域的共同性顯示出來,而且也有力地說明一些基本概念的重大作用. 簡單地說,理論分析是技術科學的主要內容,而且,它常常用到比較高深的數學工具. 只要把本書稍微瀏覽一下就對這個事實更加清楚了. 關於系統的部件的詳細構造和設計問題(也就是把理論付諸實踐的具體問題)在這本書裏幾乎是不予討論的. 關於元件的具體問題更是根本不談的.

能不能够把理論從工程實踐分出來研究呢? 其實,只要看到目前已經存在的各門技術科學以及它們的飛速發展,就會發現這個懷疑簡直是完全不必要的. 舉一個特別的例子來說:流體力學就是一門技術科學,它與空氣動力學工程師,水力學工程師,氣象學家以及其他在工作中經常利用流體力學的研究結果的人的實踐是"分割"開來的. 可是,如果沒有流體力學家的話,對於超音速流動的了解和利用至少也要大大地推遲. 因此,把工程控制論建成一門技術科學的好處就是:工程控制論使我們可能有更廣闊的眼界用更系統的方法來觀察有關的問題,因而往往可以得到解決舊問題的更有成效的新方法,而且工

程控制論還可能揭示新的以前沒有看到過的前景．最近若干年以來，控制與導航技術已經有了多方面的發展，所以，確實也很有必要設法用這樣一種統觀全局的方法來充分地瞭解與發揮這種新技術的潛在力量．

因此，關於工程控制論的討論，應該合理地包括科學中對於工程實踐可能有用的所有方面．尤其是不應該僅僅由於數學的困難而逃避任何一個問題，其實，深入地考慮一下就會發覺，任何一個問題在數學上的困難常常帶有很大的人為的性質．只要把問題的提法稍微加以改變，往往就可以使問題的數學困難減輕到進行研究工作的工程師所能處理的程度．因此，本書的數學水平也就是讀過數學分析課程的大學生的水平．關於復變數積分，變分法和常微分方程的基本知識是研讀這本書所預先需要的．此外，只要比較直觀的講法能夠達到目的，我們就不用嚴密的精巧的數學方法來討論；所以，以一個專門作具體工作的電子工程師的眼光來看，我們這種作法一定是太"學究氣"了；可是，從一個對這門科學有興趣的數學家的眼光來看，這種作法可能是太"不鄭重"了．如果真的只有這兩種批評的話，作者一方面願意承担這種責任，另一方面也會感到一些滿意，因為他將認為他在原來要作的事業裏沒有完全失敗．

在編寫本書期間，作者從和他的兩位同事的多次交談中得益很多，因為，這些談話常常使一些含混之處突然明確起來．這兩位先生就是美國加利福尼亞省理工學院(California Institute of Technology)的馬勃爾(Frank E. Marble)博士和德普利馬(Charles R. DePrima)博士．由於塞爾登杰克梯(Sedat Serdengecti)和溫克耳(Ruth L. Winkel)給予的有效幫助，大大地減輕了書稿的準備工作．對於以上提到的各位先生，作者謹表示衷心的感謝．

錢學森

# 目　錄

# 第一章

# 引　言

如果我們所考慮的系統的自由度是一,因此,只用一個變數 $y$ 就可以記錄或描述這個系統的物理狀態. 把變數 $y$ 取作時間 $t$ 的函數,也就可以描寫這個系統在時間過程中的運動狀態. 爲了確定這個運動狀態——也就是函數 $y(t)$,我們就必須知道這個系統的構造以及它的各個組成部件的特性. 具備了關於系統的這些知識之後,再根據物理學的基本定律把這些知識"翻譯"成數學的語言,這樣我們就得到一個爲了計算 $y(t)$ 而建立的方程. 這個方程可能是一個積分方程,也可能是一個積分微分方程,但是在絕大多數的情況下,它是一個微分方程,而且是一個常微分方程,因爲只有時間 $t$ 是唯一的自變數.

如果微分方程的每一項中最多只含有因變數 $y$ 或者 $y$ 的各階時間導數的一次方冪,不包含 $y$ 或者它的各階時間導數的高次方冪,也不包含這些函數的乘積,我們就說這個方程是綫性的,同時,也就把這個方程所描述的系統稱爲綫性系統. 反之,我們就說,這個方程是非綫性的,同時,把它所描述的系統稱爲非綫性系統. 更進一步,還可以把所有綫性系統分爲常系數綫性系統和變系數綫性系統兩類. 如果描述系統狀態的綫性微分方程的每一項的系數都是常數,我們就把這個系統稱爲"常系數綫性系統". 如果這些系數不全是常數而是時間 $t$ 的函數,我們就把這個系統稱爲"變系數綫性系統".

從各類微分方程的解的特性來看,以上的分類方法是有道理的. 因爲,每個系統的運動狀態的特性與描述這個系統的微分方程的類型是有密切關系的. 不但如此,微分方程的類型還能確定我們可以對系統提出的合理的問題的性質. 換句話說,微分方程的類型確定了解決系統的工程問題的正確作法. 現在我們就來看一看這種情況.

### 1.1 常系數綫性系統

讓我們來討論一個最簡單的系統——一階系統. 也就是說,微分方程是一個一階的常系數綫性方程. 如果假定系統本身的特性不受到外界的影響,並且不受到驅動函數(也就是外力)的作用,那麼,微分方程就可以寫作下列形式:

$$\frac{dy}{dt} + ky = 0. \qquad (1.1)$$

其中 $k$ 是一個實常數,可以叫作彈簧常數. 當 $y$ 不隨時間變化時, $dy/dt$ 等於零. 根據方程(1.1)必定要有 $y = 0$. 因此,系統的平穩狀態,或者平衡狀態,就相當於 $y = 0$ 的狀態.

方程(1.1)的解是

$$y = y_0 e^{-kt}, \qquad (1.2)$$

這裏, $y_0$ 是 $y$ 的初始值,或者說

$$y(0) = y_0, \qquad (1.3)$$

這樣，$y_0$ 也就是系統的離開平衡狀態的初始擾動. 對於正的 $k$ 值和負的 $k$ 值，在圖 1.1 裏畫出了系統在 $t>0$ 時的運動狀態. 我們看到，在 $k>0$ 的情況下，$y$ 隨着時間的增加而逐漸減小. 當時間無限增大時，$y\to 0$. 因此，對於 $k>0$ 的情形，系統的擾動就會最後消失掉. 於是我們就可以說，系統是穩定的. 在 $k<0$ 的情況下，系統的運動隨着時間的增加而不斷地增大，而且不論初始的擾動位移多麽微小，系統的擾動都會逐漸增長到非常大的數值，這也就是說，一旦受到擾動，系統就永遠不能再回到平衡狀態上去了. 這樣的系統就是不穩定的.

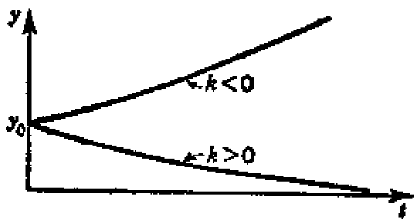



圖 1.1

對於階數更高的系統來說，微分方程裏含有更高階的導數. $n$ 階系統的微分方程就是:

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0 y=0. \tag{1.4}$$

對於實際的物理系統而言，各個系數 $a_{n-1},\cdots,a_0$ 都是實數. 在這種情況下，方程(1.4)的解可以寫成

$$y=\sum_{i=1}^{n} y_0^{(i)}e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t+\varphi_i), \tag{1.5}$$

其中 $\alpha_i$, $\beta_i$ 都是實數並且和系數 $a_{n-1},\cdots,a_0$ 有關. 各個 $\varphi_i$ 都是相角. 而且也和系數 $a_{n-1},\cdots,a_0$ 有關. 這樣一來就可以看出: 只有當所有的 $\alpha_i$ 都是負數的時候系統的運動才是穩定的. 如果某一個 $\alpha_i$ 是正數，擾動就會越來越大，因而系統也就是不穩定的.

從以上的一些例子可以看到: 關於常系數綫性系統的運動狀態，我們可以問一個嚴格的問題——系統的穩定性的問題. 不言而喻，在一個工程設計中，通常的要求就是穩定性. 只要確定了微分方程的系數，我們就可以答覆系統是否穩定的問題. 在由方程(1.1)所描述的簡單的一階系統的情況中，$k$ 的符號是唯一的有決定性意義的資料.

## 1.2 變系數綫性系統

如果在所研究的系統中有一個可變化的參數，變動這個參數就可以使系統的平穩狀態或平衡狀態相應地改變. 很自然地就可以想到: 描述系統運動狀態的微分方程的系數也是這個參數的函數. 例如，作用在飛機上的空氣動力就是飛機速率的函數，如果飛機的速率由於加速度或減速度而發生改變的話，那麽，即使飛機本身的慣性性質保持不變，作用在飛機上的空氣動力也還是要改變的. 由於這個緣故，如果我們想計算飛機的離開水平飛行路綫的擾動運動的話，基本的微分方程就會是一個變系數的方程.

讓我們再回到方程(1.1)所描述的一階系統的簡單的例子上去. 如果彈簧系數 $k$ 是飛機的速率的函數，而且假定飛機有一個不變的加速度 $a$，那末，$k$ 就是速率 $u=at$ 的函數. 因此，微分方程就可以寫成以下的形式:

$$\frac{dy}{dt}+k(at)y=0. \tag{1.6}$$

這個方程的解就是:

$$\log \frac{y}{y_0} = -\frac{1}{a}\int_0^{at} k(\xi)d\xi, \tag{1.7}$$

其中 $y_0$ 是初始擾動．如果 $k$ 總是正數，那末，$\log(y/y_0)$ 就總是負數．而且當時間增大的時候，$\log(y/y_0)$ 這個負數的絕對值也就會越來越大．因此，$y$ 就永遠小於 $y_0$，而且最後趨於消失．所以系統是穩定的．如果 $k$ 總是負數，$\log(y/y_0)$ 就是一個隨着時間增大的正數．即使初始擾動 $y_0$ 非常微小，$y$ 的數值最後也會變成很大，所以系統就是不穩定的．這樣一些系數不改變符號的變系數系統的特性和常系數系統的特性是非常相近的．

然而，有趣味的是 $k$ 既有正值也有負值的情形．我們假定 $k(at)$ 先取正值，然後取負值，最後又再取正值．如果以 $u_1 = at_1$ 表示 $k$ 的第一個零點，以 $u_2 = at_2$ 表示第二個零點，那末，依照我們以前的觀念來看，在 $u_1$ 到 $u_2$ 的速度範圍之內，系統是不穩定的(圖 1.2)．設 $y_{\min}$ 是 $y$ 的極小值，$y_{\max}$ 是 $y$ 的極大值．根據方程(1.7)就有：

$$\log \frac{y_{\min}}{y_0} = -\frac{1}{a}\int_0^{u_1} k(\xi)d\xi \tag{1.8}$$

以及

$$\log \frac{y_{\max}}{y_0} = -\frac{1}{a}\int_0^{u_2} k(\xi)d\xi. \tag{1.9}$$

從工程的觀點來看，有興趣的首要的問題就是：$y_{\max}$ 多麼大？是不是它已經大到使系統不能正常運轉的程度？我們注意到這樣一個事實：為了回答以上的問題，除了 $k$ 和 $u$ 的函數關系之外，我們還需要知道兩件事．這兩件事就是：加速度 $a$ 多麼大？初始擾動 $y_0$ 的大小是多少？因為對於固定的 $a$ 值來說，$y_{\max}$ 和 $y_0$ 成比例．但是更重要的情況是：對於固定的初始擾動來說，我們可以用增大加速度 $a$ 的辦法使偏差的極大值 $y_{\max}$ 大大地減小．這個事實可以從方程(1.9)看出來．這個事實的實際意義就是：如果儘可能迅速地通過"不穩定區域"，就可以使不利的效果減少到最低的程度．

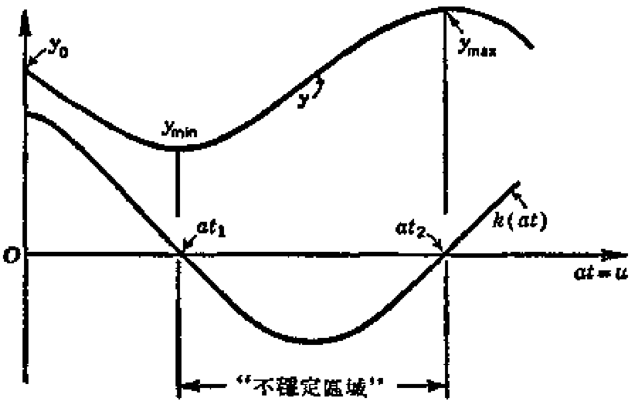



圖 1.2

由以上的討論我們知道，對於一般的變系數綫性系統來說，簡單地提出這些系統是否穩定的問題是沒有明確的意義的．更有意義的問題的提法是：在給定的擾動和給定的外界條件之下，對於一個確定的準則(判斷標準)來說，這個系統的運行狀態是否使人滿意？在我們的簡單的一階系統的例子裏，正常運行的確定的判斷準則就是 $y_{\max}$；給定的擾動就是 $y_0$；給定的外界條件就是加速度 $a$．因此，由於從常系數系統進展到變系數系統，問題的特點就已經大大地改變了．

為了避免發生誤解起見，必須指出：以上的討論只是為了說明常系數綫性系統和變系數系統在基本的數學性質上的區別而已，並不是說，在實際的工程問題中對於常系數綫性

系統只要求它們穩定就够了，而對於這些系統的其他方面的性能（例如，過渡過程中的狀態、可能發生的最大偏差 $y_{max}$ 等等）也還是要加以考慮的．同樣地，在實際的工程問題裏對變系數綫性系統提出的問題也可以是多方面的．總之，希望讀者不要把實際的工程問題和理論的說明混淆起來．

## 1.3 非綫性系統

如果在方程(1.1)所描述的簡單的一階系統裏，彈簧系數 $k$ 是擾動量 $y$ 本身的函數，那麼微分方程就成為

$$\frac{dy}{dt} + f(y) = 0, \tag{1.10}$$

其中 $f(y) = k(y)y$．我們看到這個方程是非綫性的．方程(1.10)所描述的系統也就是非綫性系統的最簡單的例子．把方程(1.10)積分，就可以用下列的關系式算出方程的解 $y(t)$：

$$t = -\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)}, \tag{1.11}$$

這裏的 $y_0$ 仍然是初始擾動．

另外一方面，把方程(1.10)逐次地求導數就得出：

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} &= 0, \\ \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dt^2} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &, \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

因此，如果 $y_1$ 是函數 $f(y)$ 的零點，並且 $f(y)$ 在 $y_1$ 點是正則的，所以，$f(y)$ 對於 $y$ 的所有階的導數在 $y_1$ 點都是有限值．我們還可以假定 $f(y)$ 在 $y_1$ 點附近可以寫成

$$f(y) = (y - y_1)^m[c_m + c_{m+1}(y - y_1) + \cdots]$$

的形狀，其中 $m \geqslant 1$，而且 $c_m \neq 0$．因此，根據(1.10)和(1.12)就得出：

$$在\ y = y_1 處\quad \frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^3y}{dt^3} = \cdots = 0. \tag{1.13}$$

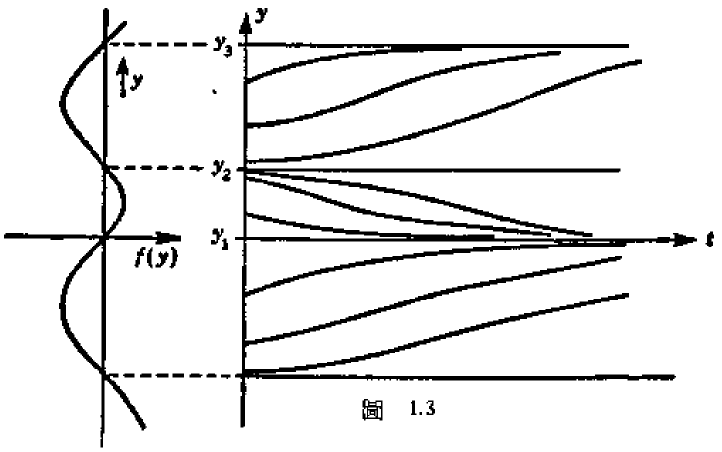



圖 1.3

這個事實的意思就是：$y$ 漸近地趨近於 $y_1$．事實上，如果 $y_0 > y_1$，而且 $f(y_0) > 0$，那末，$y$ 最後就會變成 $y_1$．如果 $y_0 < y_1$ 而 $f(y_0) < 0$，那麼當 $t \to \infty$ 時，$y$ 還是變為 $y_1$．在 $f(y)$ 的其他的零點附近，$y$ 的運動狀態也還是這種型式的（圖 1.3）．

如果初始擾動 $y_0$ 與 $f(y)$ 的某一個零點相重合的話，那末，以後 $y$ 就保持着這個數值，並不隨時間變化．因此，$f(y)$ 的各個零點都是平衡位置．

如果在某一個零點上 $df/dy>0$，就像 $y_1$ 點的情形，離開這個平衡位置的微小偏離必定會逐漸消失，因而系統最後還會回到初始狀態上去．這樣，我們就可以說，對於微小擾動而言，在 $y_1$ 點系統是穩定的．可是，如果在某一個零點上 $df/dy<0$，就像 $y_2$ 點的那種情形，離開這個平衡點的任何一個微小擾動都會使得系統變動到相鄰的平衡位置 $y_1$ 或 $y_3$ 上去．因此，$y_2$ 是一個不穩定的平衡狀態．

我們已經看到，甚至於像方程(1.10)所描述的這樣一個非常簡單的非綫性系統，它的運動狀態已經是很複雜的了．這樣的系統可以同時具有穩定性和不穩定性，因此，對於這一類系統一般地提出是否穩定的問題是毫無意義的．與其這樣，倒不如對每一個特殊的問題進行個別的考慮．不過，這裏應該指出：我們也可以在某種確定的意義下討論非綫性系統的穩定性問題，譬如：系統在李雅普諾夫(А. М. Ляпунов)意義下或其他與此類似的意義下的穩定性問題[2-4]．

關於非綫性系統運動狀態的穩定性問題，讀者可以參閱有關的專門文獻[1]．

## 1.4　工程近似的問題

幾乎可以肯定地這樣說：只要加以足够精密的分析，任何一個物理系統都是非綫性的．我們說某一個實際的物理系統是綫性系統，其意思只是說它可以充分精確地用一個綫性系統加以近似地代表而已，並且，所謂"充分精確"的意思就是說：實際系統與理想化了的綫性系統的差別，對於具體研究的問題來說已經小到無關緊要的程度．只有當具體的條件和具體的要求明確地給定以後，我們才能把一個實際的系統看作綫性系統或是非綫性系統．在這個問題上並不存在一般所謂的絕對的判斷準則．舉例來說，如果我們只想研究一個非綫性系統在它的某一個穩定平衡點附近的微小擾動運動的最後狀態的話，那末，根據李雅普諾夫的關於運動穩定性的第一近似的定理[2-4]，在一定的條件下，原來的系統就可以用一個綫性系統很好地近似；但是，如果我們的問題是想研究系統的自激振盪的話，那末，就不能把系統的非綫性的性質忽略掉，因爲那樣一來就會把產生自激振盪的物理根源(和數學根源)丟掉了．

以上所說的處理分類問題的原則，對於把綫性系統分爲常系數系統和變系數系統兩類的情形也是適用的．以方程(1.1)和方程(1.6)所描述的兩個簡單的系統爲例：如果加速度 $a$ 非常小，也就是說飛行的速度幾乎不變，由方程(1.8)就可以看出來 $y_{min}$ 比初始擾動 $y_0$ 小得多，而且這樣的 $y_{min}$ 發生在 $t$ 的數值很大的一個時刻．在一個有限的時間間隔之內，系統(1.6)的運動狀態和 $k$ 是正値的系統(1.1)的運動狀態是十分相近的．因此，在一定的場合之下，也可以用常系數系統很準確地近似一個變系數系統．

很明顯，常系數系統是最容易研究的．很幸運的是：爲數很多的工程系統經過**工程近似**的手續之後，都可以看作常系數系統．這也就是爲什麼在控制與調節的理論中，關於穩定性的這一部分理論特別發達的緣故．事實上，目前的**伺服系統**理論所處理的基本上就是這一類系統[2]．因此，我們也就先從常系數綫性系統開始討論．

1) 參閱[1]，第 4 章，§5，6．

2) 應當指出：近年來也對於非綫性調節系統和非綫性伺服系統進行了大量的研究．參閱[5—9]．

# 第 二 章

# 拉 氏 變 換 法

對於那些以時間 $t$ 爲自變數的常系數綫性微分方程來說，用拉氏變換（拉普拉斯變換）求解的方法是非常有用的．當然也可以用其他的一些方法求這類方程的解，可是，技術科學家們所以最樂於採用拉氏變換法的原因就是因爲這個方法能够把所有的問題歸結到一個一致的基礎上去．這樣一來求解的手續就被標準化了，同時，對於問題也就可能有一個普遍適用的處理方法．在很多教科書[1]裏都討論了拉氏變換的理論和實際的用法，這些工作並不是這一章的目的．這一章的目的只是爲了查閱的便利而簡要地給出一些結果，這些結果都是我們在以後各章中的討論所必需的．至於詳細的敍述和證明，讀者可以去參考註解裏所提出來的那些書籍．

### 2.1 拉氏變換和反轉公式

如果 $y(t)$ 是一個時間變數 $t$ 的函數，它的定義區域是 $t>0$．那末，$y(t)$ 的拉氏變換 $Y(s)$ 的定義就是[2]：

$$Y(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}y(t)dt, \tag{2.1}$$

這裏的 $s$ 是一個具有正實數部分的複變數；$\Re s>0$（$\Re s$ 表示 $s$ 的實數部分）．對於其他的 $s$ 值，我們用解析拓展的方法來定義函數 $Y(s)$．$Y(s)$ 的量綱是 $y$ 的量綱和時間的量綱的乘積．$s$ 的量綱是時間量綱的負一次方冪．

如果 $Y(s)$ 是已知的，那末，拉氏變換 $Y(s)$ 的原函數（也就是原來的函數）$y(t)$ 總是可以由下面的反轉公式計算出來：

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}Y(s)ds, \tag{2.2}$$

其中 $\gamma$ 是任意的一個實數，只要它比所有的 $Y(s)$ 的奇點的實數部分都大就可以了．在實際計算 $y(t)$ 時，我們可以按照 $Y(s)$ 的特點適當地變化積分的路綫．從 $Y(s)$ 求 $y(t)$ 的步驟稱爲拉氏反變換．

### 2.2 用拉氏變換法解常系數綫性微分方程

既然拉氏變換是用對一個函數所作的一個積分運算所定義的，而這個函數又是只在

---

1) 例如：H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, "Operational Methods in Applied Mathematics" Oxford University Press, New York. 1941；或者 R. V. Churchill, "Modern Operational Methods in Engineering" McGraw-Hill Book Company, Inc., New York. 1944. 如果想知道詳細的理論，可以參閱 G. Doetsch: "Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation", Verlag Julius Springer. Berlin, 1937；或者 D. V. Widder: "The Laplace Transform", Princeton University Press, Princeton, N. J., 1946；或者參閱[9—15].

2) 在這一本書裏，我們總是用大寫字母表示相當的小寫字母所代表的變數的拉氏變換．

$t>0$ 的時間間隔內定義的，所以拉氏變換法對於初值問題是特別適用的．所謂"初值問題"就是這樣一個問題：如果系統的初始狀態(也就是 $t=0$ 時的狀態)和 $t>0$ 時的驅動函數都是給定的，求在 $t>0$ 的時間間隔中系統的運動情況． 我們來考慮一個 $n$ 階的系統，假定 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ 是各階導數的系數，而且對於這個系統有一個以非齊次項所表示的驅動函數 $x(t)$． 於是，系統的微分方程就是：

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0y=x(t). \tag{2.3}$$

各個初始條件通常寫作：

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)_{t=0}=y_0^{(n-1)},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&(y)_{t=0}=y_0.\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

考慮到條件(2.4)，微分方程(2.3)就能够把系統在 $t\geqslant 0$ 時的運動狀態唯一地確定下來．

為了用拉氏變換法來解這個問題，我們把方程(2.3)的兩端，同時乘以 $e^{-st}$，然後再從 $t=0$ 積分到 $t=\infty$． 既然規定

$$\int_0^\infty e^{-st}y(t)dt=Y(s), \tag{2.1a}$$

我們就可以用部分積分的方法求出 $y(t)$ 的各階導數的拉氏變換：

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-st}\frac{dy}{dt}dt=-y_0+s\int_0^\infty e^{-st}y(t)dt=-y_0+sY(s),\\&\int_0^\infty e^{-st}\frac{d^2y}{dt^2}dt=-y_0^{(1)}-sy_0+s^2Y(s),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\text{最後}\\&\int_0^\infty e^{-st}\frac{d^ny}{dt^n}dt=-y_0^{(n-1)}-sy_0^{(n-2)}-\cdots-s^{n-1}y_0+s^nY(s).\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

根據這些結果，如果再把驅動函數 $x(t)$ 的拉氏變換寫成 $X(s)$，也就是說

$$X(s)=\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt, \tag{2.6}$$

那末，考慮到初始條件(2.4)，方程(2.3)就可以寫成：

$$\begin{aligned}&(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0)Y(s)\\&\quad=a_ny_0s^{n-1}+(a_ny_0^{(1)}+a_{n-1}y_0)s^{n-2}+(a_ny_0^{(2)}+a_{n-1}y_0^{(1)}+a_{n-2}y_0)s^{n-3}\\&\qquad+\cdots+(a_ny_0^{(n-1)}+a_{n-1}y_0^{(n-2)}+\cdots+a_1y_0)+X(s).\end{aligned} \tag{2.7}$$

如果我們再規定 $D(s)$ 和 $N_0(s)$ 分別是下列的兩個多項式：

$$D(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0 \tag{2.8}$$

和

$$\begin{aligned}N_0(s)=&\,a_ny_0s^{n-1}+(a_ny_0^{(1)}+a_{n-1}y_0)s^{n-2}+\cdots\\&+(a_ny_0^{(n-1)}+a_{n-1}y_0^{(n-2)}+\cdots+a_0y_0),\end{aligned} \tag{2.9}$$

於是方程(2.7)又可以寫作

$$Y(s)=\frac{N_0(s)}{D(s)}+\frac{X(s)}{D(s)}. \tag{2.10}$$

根據方程(2.9)我們看到,(2.10)的第一項 $N_0(s)/D(s)$ 是與初始條件有關的. 我們把這一項寫作 $Y_c(s)=N_0(s)/D(s)$. 多項式 $N_0(s)$ 的次數最多也不會超過 $n-1$ 次, 因而它的次數總是比 $D(s)$ 的次數低. 如果方程(2.4)所表示的初始條件全都等於零, $N_0(s)$ 也就隨之等於零了. 在這種情形下, $Y(s)$ 就只由第二項 $X(s)/D(s)$ 確定. 第二項是與驅動函數有關的. 我們把這一項寫作 $Y_i(s)=X(s)/D(s)$. 和普通的微分方程理論中所用的術語一樣, 可以把第一項 $N_0(s)/D(s)$ 稱爲補充函數, 把第二項 $X(s)/D(s)$ 稱爲特解. 應用反轉公式(2.2), 就可以由方程(2.10)所表示的 $Y(s)=Y_c(s)+Y_i(s)$ 得出眞正的解 $y(t)$.

從以上的討論,我們可以看出, 拉氏變換本身只是一個"翻譯"的手續, 它把一個用時間變數 $t$ 所描述的物理過程翻譯成用變數 $s$ 所描述的過程, 這樣的手續並不影響物理過程本身的性質, 只不過是把這個過程的描述從"$t$ 的語言"翻譯成"$s$ 的語言"而已. 在 $t$ 的語言裏用分析運算(微分或積分)所描述的過程, 用 $s$ 的語言來敍述就只要用簡單的代數運算(乘或除)就可以了; $t$ 的語言中的微分方程, 用 $s$ 的語言來表示就簡化爲代數方程, 從而也就可以簡化計算的手續和表達的方式.

## 2.3 拉氏變換的"字典"(拉氏變換表)

當我們用拉氏變換法處理問題時,常常需要根據已知的拉氏變換函數 $Y(s)$ 求出原函數 $y(t)$. 我們當然可以利用反轉公式進行這項工作, 可是反轉公式(2.2)中的積分運算常常是很繁複,很花費時間的; 因此, 對於那些常用的和典型的 $y(t)$ 和 $Y(s)$, 人們已經編製了一些字典式的表格[1]. 利用這種變換表我們就可以根據已知的 $Y(s)$ 查出相應的 $y(t)$, 也可以從已知的 $y(t)$ 查出相應的 $Y(s)$, 這樣就大大地減輕了計算手續. 下面我們也給出一個最最簡略的拉氏變換的"字典"——一個很小的拉氏變換表:

表 2.1 拉氏變換的小"字典"

| $Y(s)$ | $y(t)$ |
|---|---|
| $1/s$ | $1$ |
| $1/s^n$ | $t^{n-1}/\Gamma(n)$ |
| $1/(s-a)$ | $e^{at}$ |
| $a/(s^2+a^2)$ | $\sin at$ |
| $s/(s^2+a^2)$ | $\cos at$ |
| $a/(s^2-a^2)$ | $\sinh at$ |
| $s/(s^2-a^2)$ | $\cosh at$ |
| $s/(s^2+a^2)^2$ | $\frac{t}{2a}\sin at$ |
| $1/(s^2+a^2)^2$ | $\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$ |

在最常遇到的情形裏, 驅動函數 $x(t)$ 的拉氏變換 $X(s)$ 的型式都是 $s$ 的兩個多項式的比值,因此,由方程(2.10)所給出的完全解 $Y(s)$ 也是 $s$ 的兩個多項式的比值. 這樣一來,用求部分分式的方法就可以把 $Y(s)$的表達式分解爲若干個簡單分式的和數. 對於每一個分式都可以用反轉公式(實際上很少這樣作)或者用比較好的查表方法求出原函數來.

---

1) 例如[12]以及第 6 頁註解中所提出的各本書中都有比較簡短的表.

### 2.4 關於正弦式的驅動函數的討論

多項式的比值 $N_0(s)/D(s)$ 可以分解成部分分式。如果多項式 $D(s)$ 的 $n$ 個根 $s_1$, $s_2$, …, $s_n$ 都是互不相等的，換句話說，$D(s)$ 沒有重根，那末這個部分分式就是：

$$\frac{N_0(s)}{D(s)} = \sum_{r=1}^{n} \frac{N_0(s_r)}{D'(s_r)} \frac{1}{(s - s_r)}, \tag{*}$$

其中的 $D'(s)$ 表示 $D(s)$ 對於 $s$ 的導數。根據上一節裏的"字典"，把這個和數逐項地"翻譯"出來，就得到解 $y(t)$ 中由於初始條件而產生的 $y_c(t)$ 部分，[這一部分稱為"補充函數"，它也就是方程(2.3)在 $x(t) = 0$ 而初始條件仍然是(2.4)的情形的解。]：

$$y_c(t) = \sum_{r=1}^{n} \frac{N_0(s_r)}{D'(s_r)} e^{s_r t}. \tag{2.11}$$

一般說來，$D(s)$ 的根 $s_r$ 是複數。對於實際的物理系統來說，微分方程(2.3)的系數 $a_0$, $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ 都是實數。根據方程(2.8) $D(s)$ 的各個複數根 $s_r$ 必然是成複共軛對出現的。這也就是說，如果 $D(s)$ 有一個複數根是 $\alpha+i\beta(\beta \neq 0)$ 的話，那末 $\alpha-i\beta$ 也必然是 $D(s)$ 的根。如果所有的根 $s_r$ 的實數部分都是負數，那末 $y_c(t)$ 就會隨着時間的增加按照指數律減小，最後 $y_c(t) \to 0$。因此，系統就是穩定的。

如果表示外力的驅動函數 $x(t)$ 是正弦式的，為了計算的方便，我們就把它寫成下列的複數形式(眞正的外力只是這個表示式的實數部分或者虛數部分)：

$$x(t) = x_m e^{i\omega t}, \tag{2.12}$$

其中的 $x_m$ 是振幅，$\omega$ 是頻率(角頻率)。根據拉氏變換的"字典"，就有

$$X(s) = x_m \frac{1}{s - i\omega}.$$

因此，方程(2.10)的第二項在現在的情形下就是：

$$Y_i(s) = \frac{x_m}{(s - i\omega)D(s)}.$$

在這裏，我們可以把得到的結果推廣到更一般的情形中去。如果所考慮的系統不是只由一個微分方程所描述(像以前討論過的那樣)，而是用一個微分方程組所描述的。舉例來說，描述系統狀態的是這樣一個方程組：

$$\left.\begin{aligned} a_{12}\frac{d^2y}{dt^2} + a_{11}\frac{dy}{dt} + a_{10}y + b_{12}\frac{d^2z}{dt^2} + b_{11}\frac{dz}{dt} + b_{10}z = x(t), \\ a_{22}\frac{d^2y}{dt^2} + a_{21}\frac{dy}{dt} + a_{20}y + b_{22}\frac{d^2z}{dt^2} + b_{21}\frac{dz}{dt} + b_{20}z = 0 \end{aligned}\right\}$$

(其中的系數 $a_{ij}$, $b_{ij}$ 都是常數)。

讓 $y$ 的初始條件全都等於零(這樣作的意義就是把 $y$ 用 $y_i$ 來代替)，對系統的微分方程組進行拉氏變換，就得到一個代數方程組，然後再用代數方法把除 $Y_i(s)$ 以外的其餘未知函數(例如，上面例子裏的 $Z(s)$)消去，最後，特解 $Y_i(s)$ 的拉氏變換就可以表示為下列的形狀：

$$Y_i(s) = F(s)X(s) \equiv \frac{N(s)}{D(s)}X(s) = \frac{x_m N(s)}{(s - i\omega)D(s)}, \tag{2.13}$$

其中 $N(s)$ 的次數小於 $D(s)$ 的次數，當 $N(s) = 1$ 時，問題就簡化為(2.10)所表示的比較

簡單的情形．在推廣了的情况下，部分分式的法則(*)仍舊是適用的． 但是，現在的分母多項式是 $(s-i\omega)D(s)$，這個多項式的根是 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 和 $i\omega$． 因而就有

$$Y_i(s) = x_m\left[\frac{N(i\omega)}{D(i\omega)}\frac{1}{s-i\omega} + \sum_{r=1}^{n}\frac{N(s_r)}{(s_r-i\omega)D'(s_r)}\frac{1}{s-s_r}\right]. \tag{2.14}$$

所以由於正弦式的驅動函數(2.12)所產生的特解就是

$$y_i(t) = x_m\left[\frac{N(i\omega)}{D(i\omega)}e^{i\omega t} + \sum_{r=1}^{n}\frac{N(s_r)}{(s_r-i\omega)D'(s_r)}e^{s_r t}\right]. \tag{2.15}$$

對於穩定的系統來說，所有的 $s_r$ 的實數部分都是負數，所以當 $t\to\infty$ 的時候，$y_i(t)$ 的第二部分就等於零．這時的狀態稱爲穩態．剩下的第一部分就是系統的穩態解 $[y_i(t)]_{st.}$：

$$[y_i(t)]_{st.} = x_m\frac{N(i\omega)}{D(i\omega)}e^{i\omega t},$$

穩態解與驅動函數的比值也就可以用下列簡單的關係式表示出來：

$$\frac{[y_i(t)]_{st.}}{x(t)} = \frac{N(i\omega)}{D(i\omega)} = F(i\omega). \tag{2.16}$$

這個公式使我們能够十分簡捷地計算出正弦驅動函數所產生的穩態解． $\omega$ 的函數 $F(i\omega)$ 稱爲系統的頻率特性．

當驅動函數的角頻率 $\omega$ 趨近於零的時候，驅動函數就趨近於一個不隨時間改變的常數 $x_m$． 方程(2.16)表明：$F(0)$ 就是當 $x$ 是常數的情况下 $y$ 的穩態值與 $x$ 的比值． 這就是 $F(s)$ 在 $s=0$ 的值的物理意義． 在以後的討論中，我們還要經常地用到這個物理解釋．我們把 $F(0)$ 的絕對值 $K=|F(0)|$ 稱爲系統的放大或增益．

## 2.5 關於單位冲量驅動函數的討論

驅動函數 $x(t)$ 並不必須是連續函數． 現在我們假定驅動函數 $x(t)$ 是作用在 $t=0$ 這一瞬間的一個單位冲量，也就是，

$$\text{如果 } t\neq 0,\quad x(t)=0;$$
$$\text{如果 } t=0,\quad x(t)\to\infty,$$

而且

$$\int_0^\infty x(t)dt = 1.$$

這樣規定的 $t$ 的函數稱爲狄拉克(Dirac)冲量函數，通常用 $\delta(t)$ 表示．不難證明，這樣一個單位冲量驅動函數的拉氏變換 $X(s)$ 就等於 1． 如果把單位冲量驅動函數作用到一般的系統上去，那麼，由於這個冲量而引起的系統的反應，按照方程(2.13)就是

$$Y_i(s) = \frac{N(s)}{D(s)}\cdot 1 = F(s). \tag{2.17}$$

由於這個冲量而產生的解 $y(t)$，通常是用 $h(t)$ 來表示的． 根據反轉公式(2.2)，

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}F(s)ds. \tag{2.18}$$

如果系統是穩定的，所有的根 $S_r$ 的實數部分都是負的，這也就是說，在複數平面上 $F(s)$ 的所有的奇點都位於虛軸的左邊． 因此，在表示 $h(t)$ 的積分(2.18)裏，我們就可以用虛軸作爲積分的路綫，這也就是說，方程(2.18)裏的 $\gamma$ 可以取作零：$\gamma=0$．

# 第 三 章

# 輸入、輸出和傳遞函數

在前一章裏我們已經看到，在用拉氏變換法處理問題的時候，常系數綫性系統(2.3)的運動狀態和多項式 $D(s)$ 有着本質的關聯。 $D(s)$ 是由方程(2.8)規定的，而且它的系數也就是微分方程的系數。 不僅如此，就是在一般的情形裏，如果初值問題裏的 $y(t)$ 的初始值和各個初始導數値都等於零，那末，系統的運動狀態也是由兩個多項式的比値 $N(s)/D(s)$ 所完全確定的。我們是用 $F(s)$ 表示這個比値的。如果驅動函數的拉氏變換是 $X(s)$ 而特解的拉氏變換是 $Y_i(s)$ 的話，方程(2.13)就給出

$$Y_i(s) = F(s)X(s). \tag{3.1}$$

可以把這個方程看作是一個運算子方程： $X(s)$ 受到運算子 $F(s)$ 的作用之後就變成 $Y_i(s)$，或者說，$F(s)$ 把 $X(s)$ 轉變爲 $Y_i(s)$。 因此我們就把函數 $F(s)$ 稱爲系統的傳遞函數、$x(t)$ 和它的拉氏變換 $X(s)$ 都稱爲系統的輸入，$y_i(t)$ 和它的拉氏變換 $Y_i(s)$ 都稱爲系統的輸出。 爲了特別表明 $y_i(t)$ 只是系統的特解而不是由於初始條件而產生的補充函數，我們把 $y_i(t)$ 稱爲由於輸入而產生的輸出，把 $y_c(t)$ 稱爲由於初始條件而產生的輸出。

拉氏變換的優點就在於把解微分方程的問題簡化爲代數的運算。從 $Y(s)$ 變回 $y(t)$ 的這個步驟實際上是很少需要的。 理由是這樣的：既然系統的運動狀態 $y(t)$ 可以由 $Y(s)$ 完全確定，那末，也就可能把對 $y(t)$ 所提出的技術要求"翻譯"成對 $Y(s)$ 所提出的某些要求，或者說，如果已經給定了輸入的特性，那末，對 $y(t)$ 所提出的要求，也就可以變爲對傳遞函數 $F(s)$ 所提出的某些要求。例如：如果要求系統(2.3)是穩定系統的話，我們並不需要先把(2.10)中的 $N_0(s)/D(s) = Y_c(s)$ 變回方程(2.11)，然後再要求 $y_c(t)$ 隨着時間的增大而趨於消失，實際上，我們只要要求傳遞函數 $1/D(s)$ 的極點都位於 $s$ 平面的左半部也就足够了。這種作法顯然可以減少許多計算手續。

根據傳遞函數來研究或者設計一個系統是伺服系統工程中的基本方法。 在這一章裏，我們將要用一系列的實例來說明這個方法。

## 3.1 一階系統

作爲第一個例子，我們來研究一個懸臂彈簧(圖 3.1)。 彈簧的一個端點連接在一個阻尼器上，另外一端點可以在一根直桿上作滑動運動。 阻尼器上的那一個端點的位置用 $y(t)$ 來表示，滑動端點的位置用 $x(t)$ 來表示。 由於有阻尼器的緣故，$y(t)$ 就不會和 $x(t)$ 相等，$y(t)$ 的運動落後於 $x(t)$。 如果我們讓滑動端點按照規定好了的規律 $x(t)$ 運動，這裏的問題就是要

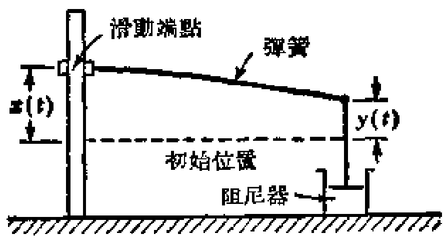



圖 3.1

研究 $y(t)$ 的情況. $x(t)$ 就是系統的輸入, $y(t)$ 是系統的輸出.

設系統的彈簧常數是 $k$,阻尼器的**阻尼系數**(也就是阻力與速度的比值)是 $c$. 如果再假定運動的加速度相當小,以至於慣性力可以忽略掉[1]. 由力的平衡條件就可以得到系統的運動方程:

$$c\frac{dy}{dt}+k(y-x)=0,$$

$c$ 與 $k$ 的比值 $c/k$ 的量綱是時間. 這個數量是系統的一個特性時間(或特徵時間), 我們把這個比值

$$\tau_1=\frac{c}{k} \tag{3.2}$$

稱爲系統的**時間常數**.

運動方程可以改寫爲

$$\tau_1\frac{dy}{dt}+y=x. \tag{3.3}$$

初始條件只是

$$y(0)=y_0. \tag{3.4}$$

用 $e^{-st}$ 乘方程(3.3)的兩端, 然後再從 $t=0$ 到 $t=\infty$ 積分. 我們就得到作過拉氏變換的方程

$$(\tau_1 s+1)Y(s)=X(s)+\tau_1 y_0.$$

於是

$$Y(s)=\frac{X(s)}{\tau_1 s+1}+\frac{\tau_1 y_0}{\tau_1 s+1}. \tag{3.5}$$

因此,由於輸入而產生的輸出就是

$$Y_i(s)=\frac{1}{\tau_1 s+1}X(s), \tag{3.6}$$

而由於初始條件產生的輸出就是

$$Y_c(s)=\frac{\tau_1 y_0}{\tau_1 s+1}. \tag{3.7}$$

系統的傳遞函數 $F(s)$ 就是

$$F(s)=\frac{1}{\tau_1 s+1}. \tag{3.8}$$

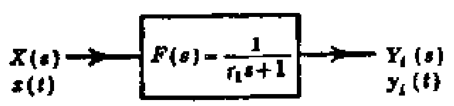



圖 3.2

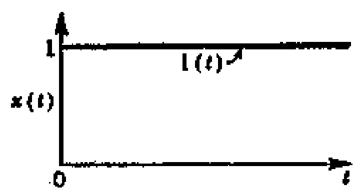



圖 3.3

方程(3.6)可以用圖形表示出來,就像圖 3.2 所畫的那樣. 這樣一個簡單的形象化的表示法很能幫助我們想象或分析系統的情況. 通常把這樣的表示法稱爲方塊圖.

1) 可以參閱[1]第 49 頁 §5.

讓我們對於輸入 $x(t)$ 的幾個特別情形來研究一下輸出 $y(t)$ 的情況.

首先,我們來考慮輸入 $x(t)$ 是單位階躍函數 $1(t)$ 的情形(參看圖 3.3).

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } t < 0, \\ 1, & \text{如果 } t \geqslant 0. \end{cases}$$

這時

$$X(s) = \int_0^\infty 1(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s},$$

而且

$$Y_i(s) = \frac{1}{s(\tau_1 s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/\tau_1)}.$$

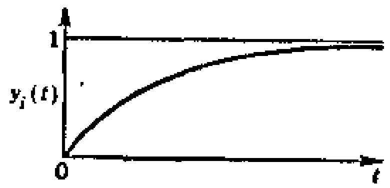
因此,根據我們的"字典"(表 2.1),由於輸入而產生的輸出就是

$$y_i(t) = 1 - e^{-t/\tau_1}. \tag{3.9}$$

根據方程(3.7),由於初始條件而產生的輸出就是

$$y_c(t) = y_0 e^{-t/\tau_1}. \tag{3.10}$$

圖 3.4 表示出輸出的特徵. 由於初始條件而產生的輸出 $y_c(t)$ 是一個單純的衰減函數,這個衰減函數的時間常數就是 $\tau_1$ [圖 3.4(b)]. 由於輸入而產生的輸出 $y_i(t)$ 按照指數律趨近於水平漸近綫,時間常數也是 $\tau_1$. 事實上,當 $t = \tau_1$ 的時候,輸出 $y_i(t)$ 的數值就達到了最後漸近値的 63%.



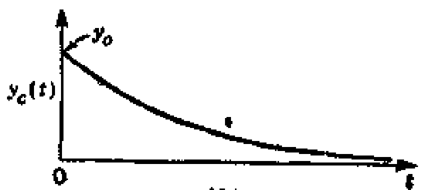




圖 3.4

我們把輸入 $x(t)$ 與輸出 $y_i(t)$ 的差數 $e(t) = x(t) - y_i(t)$ 稱爲偏差信號,在現在所考慮的情形裏

$$e(t) = x(t) - y_i(t) = e^{-t/\tau_1}. \tag{3.11}$$

所以,當 $t \to \infty$ 時,偏差信號趨於零.

現在,我們再來考慮另外一種輸入的情形. 假定輸入是正弦式的,或者,更具體些

$$x(t) = x_m e^{i\omega t},$$

其中 $x_m$ 是振幅,$\omega$ 是頻率. 這時

$$X(s) = \frac{x_m}{s - i\omega}. \tag{3.12}$$

由於初始條件而產生的輸出 $Y_c(s)$ 和前一種情形一樣,也是方程(3.7)或方程(3.10). 由於輸入而產生的輸出就是

$$Y_i(s) = x_m \frac{1}{(s - i\omega)(\tau_1 s + 1)} = \frac{x_m}{1 + i\omega\tau_1}\left(-\frac{1}{s + (1/\tau_1)} + \frac{1}{s - i\omega}\right).$$

因此,根據我們的"字典"(表 2.1),輸出 $y_i(t)$ 就是

$$y_i(t) = -\frac{x_m}{1 + i\omega\tau_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{x_m}{1 + i\omega\tau_1} e^{i\omega t}.$$

這個表示式中的第一項是一個單純的衰減函數. 第二項表示穩態輸出 $[y(t)]_{st.}$. 因而就

有

$$\frac{[y(t)]_{st.}}{x(t)}=\frac{1}{1+i\omega\tau_1}=F(i\omega).$$

這個關係和我們在方程(2.16)中所表達的普遍結果是完全一致的. 由於

$$\frac{1}{1+i\omega\tau_1}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau_1^2}}e^{-i\tan^{-1}\omega\tau_1}, \tag{3.13}$$

穩態輸出就可以表示爲

$$[y(t)]_{st.}=\frac{x_m}{\sqrt{1+\omega^2\tau_1^2}}e^{i(\omega t-\tan^{-1}\omega\tau_1)}.$$

因此,穩態輸出的振幅就被減少到輸入的振幅的 $1/\sqrt{1+\omega^2\tau_1^2}$ 倍,而且輸出的相角比輸入的相角落後的數量是 $\tan^{-1}\omega\tau_1$. 如果輸入的頻率 $\omega$ 相當低, $\omega\tau_1\ll 1$,因而 $\tan^{-1}\omega\tau_1\approx\omega\tau_1$,這時也就有

$$[y(t)]_{st.}\approx x_m e^{i\omega(t-\tau_1)}\qquad \tau_1\omega\ll 1. \tag{3.14}$$

這也就是說:振幅沒有改變,但是有一個時滯(時間上的落後),這個時滯也就等於傳遞函數的時間常數 $\tau_1$. 如果輸入的頻率 $\omega$ 相當高, $\tau_1\omega\gg 1$,因而 $\tan^{-1}\omega\tau_1\approx\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau_1^2}}\approx\frac{1}{\omega\tau_1}$,這時就有

$$[y(t)]_{st.}\approx\frac{x_m}{\omega\tau_1}e^{i[\omega t-(\pi/2)]}\qquad \tau_1\omega\gg 1. \tag{3.15}$$

在這種情形中,振幅被減少到 $1/\omega\tau_1$ 倍,而相角落後的數量是 $\pi/2$. 我們把以上所討論的兩種極端的輸出情形表示在圖 3.5 中.

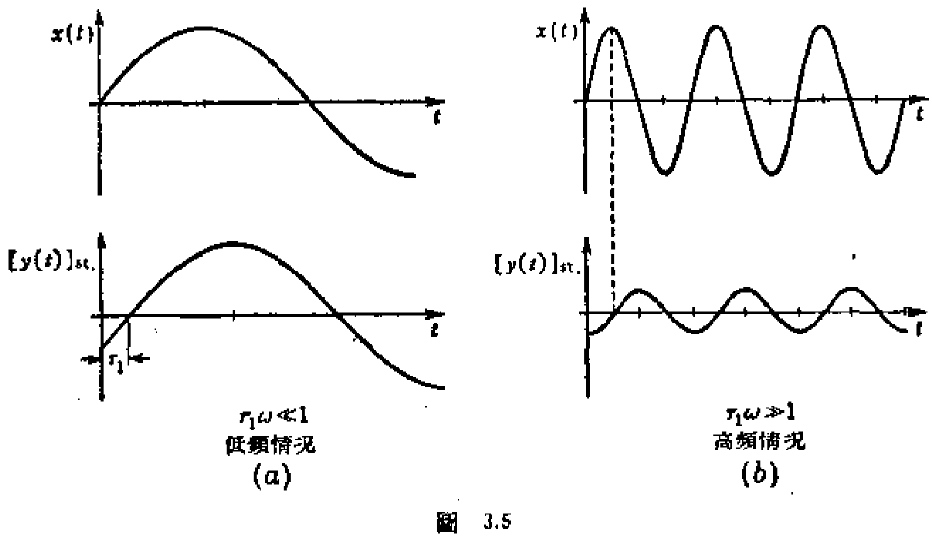



圖 3.5

### 3.2 傳遞函數的表示法

傳遞函數 $F(s)$ 是複變數 $s$ 的函數. 因爲在普通的情形下,它是兩個 $s$ 的多項式的比值,所以函數 $F(s)$ 除了一個常數因數之外可以由它的零點和極點所確定. 如果對於某一個特別的 $s$ 值 $F(s)$ 的值是已知的話,也就可以把常數因數確定下來,這時函數 $F(s)$

就完全確定了，這裏，最方便的就是考慮 $s$ 在原點的值 $s=0$，因爲 $F(0)$ 有具體的物理意義：

$$|F(0)|=K \tag{3.16}$$

是系統的放大，也就是系統在常數輸入的情況下輸出的穩態值與輸入的比值．又因爲對於大多數的實際情形，$F(0)$ 常常是正數，因而 $F(0)=K$．所以，傳遞函數 $F(s)$ 就可以由零點、極點和放大唯一地確定．這也就是傳遞函數的一種可能的表示方法．舉例來說，我們可以這樣來表示方程(3.8)所給的傳遞函數：它的放大是 1；在 $-1/\tau_1$ 有一個單極點；沒有零點．

根據複變數函數論的結果，如果在 $s$ 平面的虛軸上，$F(s)$ 的實數部分和虛數部分都已經完全給定的話，那麼，用解析開拓的方法[1]就可以把 $s$ 平面上其他部分的 $F(s)$ 值也確定下來．因此，我們也可以用複函數 $F(i\omega)$（$\omega$ 是實數，$-\infty<\omega<+\infty$）來代表函數 $F(s)$．這就是傳遞函數的另外一種表示方法．對於實際的物理系統來說，$F(s)=N(s)/D(s)$ 的分子多項式 $N(s)$ 和分母多項式 $D(s)$ 的系數都是實數，所以，如果我們用 $\bar{F}$ 表示 $F$ 的複共軛數的話，就有

$$F(-i\omega)=\overline{F(i\omega)}. \tag{3.17}$$

因此，對於實際的物理系統，只要知道 $\omega\geqslant 0$ 的 $F(i\omega)$ 值，就可以知道 $\omega\leqslant 0$ 的 $F(i\omega)$ 值，從而也就可以定出對於任意 $s$ 的 $F(s)$ 的值．從方程(2.16)我們已經知道函數 $F(i\omega)$ 是頻率 $\omega$ 的穩態輸出與正弦輸入之比，$F(i\omega)$（$-\infty<\omega<+\infty$）就是系統的頻率特性，所以，頻率特性也是傳遞函數 $F(s)$ 的一種表示方法．例如，方程(3.13)就是簡單的一階系統(3.3)的頻率特性．

伯德(H. W. Bode)創造了一種表示頻率特性的方法，這種方法就稱爲伯德圖．假定複數 $F(i\omega)$ 的絕對值是 $M$，相角是 $\theta$（$M$ 和 $\theta$ 當然都是 $\omega$ 的函數），也就是說

$$F(i\omega)=Me^{i\theta}. \tag{3.18}$$

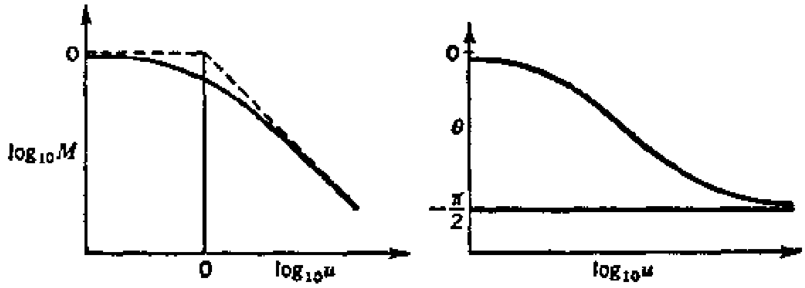
把 $\log\omega$ 取作自變數，然後再把因變數 $\log M$ 和 $\theta$ 對 $\log\omega$ 的函數關係畫在兩張圖上，這樣得出的圖就是伯德圖．（$\log M$ 對 $\log\omega$ 的函數關係通常稱爲系統的對數振幅特性．而 $\theta$ 對 $\log\omega$ 的函數關係稱爲系統的對數相特性）．至於爲什麼在這裏 $M$ 取了對數尺度而 $\theta$ 並不取對數尺度，這個道理可以在以後的討論中看出來．以方程(3.13)所表示的簡單系統爲例，

$$\left.\begin{aligned} M&=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau_1^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\\ \text{而}\quad \theta&=-\tan^{-1}\omega\tau_1=-\tan^{-1}u\end{aligned}\right\}u=\omega\tau_1 \tag{3.19}$$

其中 $u=\omega\tau_1$ 是無量綱頻率[9, 16]．這個系統的伯德圖就是圖 3.6．頻率特性在低頻率和高頻率時的情況已經用方程(3.14)和(3.15)表示出來了．當 $u\to\infty$ 時，$\log_{10}M$ 對 $\log_{10}u$ 的圖綫的斜率是 $-1$，對於很小的 $u$ 值來說，斜率差不多是 0．因此，一個一階系統的 $M\sim u$ 圖可以用兩條直綫來近似地代替．這兩條直綫就是圖 3.6 中的虛折綫．這條虛折綫稱爲

漸近對數振幅特性或者梯形對數振幅特性[9].

在聲學和電學的文獻裏,爲了把振幅的度量單位化爲分貝(decibel,簡寫爲 db),常常改用 $20\log_{10} M$ 作爲 $M \sim u$ 圖中的因變數. 頻率增加一倍就稱爲一個倍頻程 (octave, 簡寫爲 oct). 因此,圖 3.6 中斜率等於 $-1$ 的部分,用分貝和倍頻程作單位,這部分的斜率




$M e^{i\theta} = \frac{1}{1+i\omega\tau_1}$

圖 3.6

就是 $-20\log_{10}2 = -6.02$ 分貝/倍頻程 (db/oct). 在圖 3.6 裏我們還看到這樣一個事實:近似於 $\log_{10} M$ 的虛綫在 $u = 1$ 點,也就是 $\omega = 1/\tau_1$ 處通過 0 值. 因此,我們就可以用實驗方法測量一個一階系統的頻率特性,把測量的結果按照上述的方式畫成伯德圖. 只要記下伯德圖上 $\log_{10} M$ 的近似直綫穿過橫軸時的角頻率 $\omega_c$ 就可以簡單地估計出系統的時間常數,$\tau_1 \approx 1/\omega_c$.

另外一個表示頻率特性的方法是乃奎斯特(H. Nyquist)所創始的,稱爲乃氏圖. 這種方法是把複數 $F(i\omega)$ 或 $1/F(i\omega)$ 直接畫到 $F$ 平面或 $1/F$ 平面上去,曲綫的參數就是角頻率 $\omega$. 函數 $1/F$ 有時候稱爲反振幅相角特性. $F$ 平面上的圖綫 $F(i\omega)$ 就稱爲振幅相角特性. 對於一個簡單的一階系統來說,$F(i\omega) = 1/(1 + i\omega\tau_1)$ 的圖綫是一個半圓,在 $\omega = 0$ 時,圖綫從 1 點出發;在 $\omega\tau_1 = u = 1$ 時,圖綫通過 $1/(1+i) = (1/2)(1-i)$ 點;當 $\omega \to \infty$ 時,圖綫趨向於原點,並且以原點爲終點. 在這種情形裏,$1/F$ 圖綫比 $F$ 圖綫還要簡單得多:$1/F = 1 + i\omega\tau_1$. 所以,在 $1/F$ 平面上,這條圖綫就是從 1 點出發的一條與虛軸平行的直綫. 圖 3.7 就是一階系統的兩種乃氏圖.

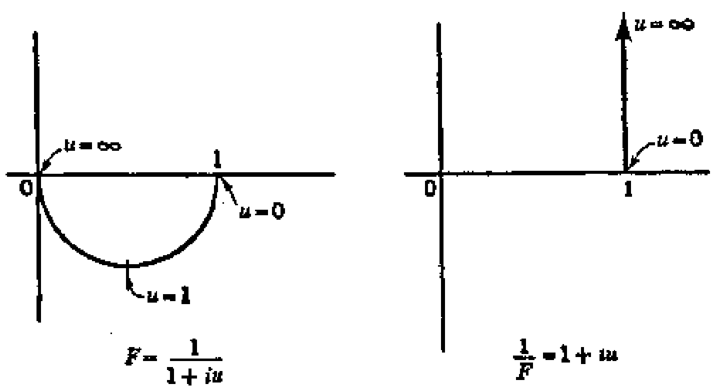



圖 3.7

### 3.3 一階系統的一些例子

在一個複合系統裏,常常有很多元件可以用一階的傳遞函數來近似地表示. 在這一節裏,我們將要簡略地討論這類元件的幾個例子,並且把它們特有的頻率特性用伯德圖或乃氏圖表示出來.

積分元件 一個電動機的轉速 $d\varphi/dt$ 與輸入電壓 $v$ 成比例,用微分方程來表示就是

$$\frac{d\phi}{dt} = Kv, \tag{3.20}$$

其中 $K$ 是與所採用的度量單位有關的常數．電動機的轉子的角位置 $\phi$ 與下列積分成比例，

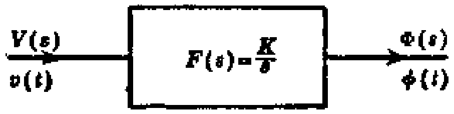



圖 3.8

$$\int_0^t v dt.$$

這個關係可以用方塊圖 3.8 表示出來，假設 $V(s)$ 和 $\Phi(s)$ 分別是 $v$ 和 $\phi$ 的拉氏變換． 這個系統的傳遞函數 $F(s) = K/s$ 是函數 $1/(\tau_1 s + 1)$ 當 $\tau_1 \to \infty$ 時的極限情形，它在原點 $s = 0$ 有一個極點．為了把這裏的 $K$ 還看作系統的放大，我們就必須把以前規定的放大的定義修改一下，以前的那一個定義適用於原點不是傳遞函數的零點或極點的情形． 對於一個積分系統，即對傳遞函數 $F(s)$ 在原點 $s = 0$ 有一個單極點的系統來說，放大 $K$ 就應該定義為

$$K = \lim_{s\to 0} |sF(s)|. \tag{3.21}$$

系統(3.20)的頻率特性是

$$F(i\omega) = \frac{K}{i\omega} = \left(\frac{K}{\omega}\right) e^{-i(\pi/2)}.$$

因此，按照方程(3.18)，

$$M = \frac{K}{\omega}, \quad \theta = -\frac{\pi}{2}. \tag{3.22}$$

圖 3.9 就是伯氏圖，圖 3.10 是乃氏圖．

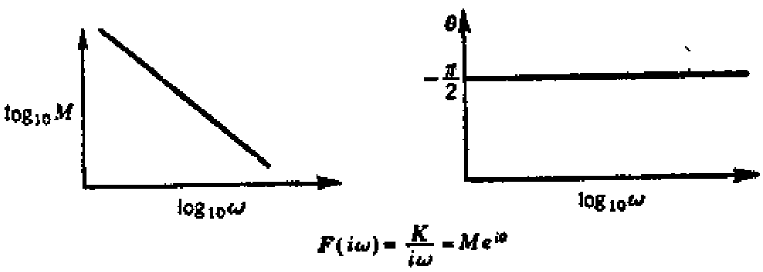



圖 3.9

微分元件　一個迴轉測速計（測速陀螺）的輸出電壓 $v$ 和進動軸的角速度 $d\phi/dt$ 成比例，即

$$v = K\frac{d\phi}{dt},$$

其中 $K$ 是比例常數． 這個情形和前面討論的電動機的情形恰好相反． 傳遞函數 $F(s) = Ks$ 在原點有一個零點．因此，對於一個微分系統，即對傳遞函數 $F(s)$ 在原點 $s = 0$ 有一個單零點的系統來說，放大 $K$ 的定義應該改為

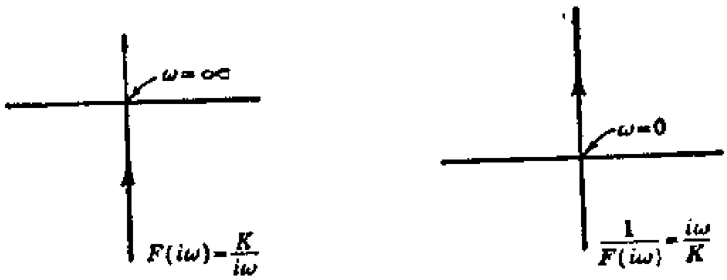



圖 3.10

$$K = \lim_{s\to 0}\left|\frac{F(s)}{s}\right|. \tag{3.23}$$

圖 3.11 是這個系統的方塊圖，圖 3.12 是伯德圖，圖3.13 是乃氏圖。

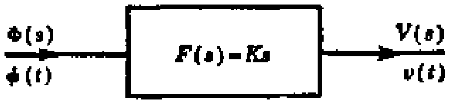
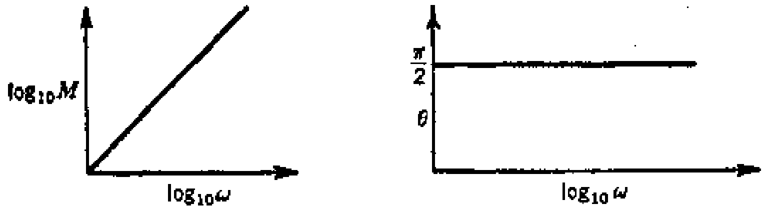



圖 3.11




$F(i\omega)=Ki\omega=Me^{i\theta}$

圖 3.12

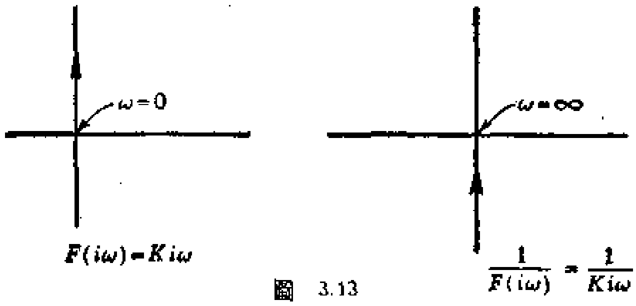



圖 3.13

簡單的相角落後電路　考慮圖 3.14 的包含電阻 $R$ 和電容 $C$ 的電路。$v_1$ 和 $v_2$ 分別是輸入電壓和輸出電壓。假設 $j=j(t)$ 是流入電阻 $R$ 和電容 $C$ 的電流，如果在 $t=0$ 的時候，電容 $C$ 上沒有電荷。那末

$$jR+\frac{1}{C}\int_0^t j(t)dt=v_1,$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t j(t)dt=v_2.$$

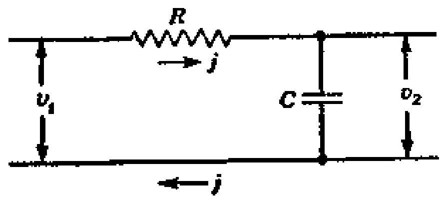



圖 3.14

先用 $e^{-st}$ 乘這兩個方程，然後再從 $t=0$ 到 $t=\infty$ 積分，就得到這兩個方程的拉氏變換，

$$\left(R+\frac{1}{Cs}\right)J(s)=V_1(s),$$

$$\frac{1}{Cs}J(s)=V_2(s).$$

因此

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=F(s)=\frac{1}{1+RCs}. \tag{3.24}$$

從方程(3.24)可以看出，這個電阻電容電路的傳遞函數和有阻尼器的懸臂彈簧的傳遞函數(3.8)是相同的，這個電路系統的時間常數就是 $\tau_1=RC$。這個系統的伯德圖和乃氏圖就是圖 3.6 和圖 3.7。這個電路常常用來產生系統的相角落後。

可以在這裏附帶提一下：雖然上述的懸臂彈簧系統和這一個電路系統的動態特性是

相同的，但是我們知道：在實際工程中改變和調整那個系統的參數 $c$ 和 $k$ 往往是比較困難的，而且 $c$ 和 $k$ 的可能的變動範圍也很有限，可是在這個電路裏改變和調整 $R$ 和 $C$ 的數值就比較容易。而且 $R$ 和 $C$ 的變動範圍也可以很大。從這個具體例子就可以看出用電學方法進行調節或控制常常比用機械方法方便得多。

**相角超前電路**　圖 3.15 表示一個更複雜的電路。這個電路的方程是：

$$j = j_1 + j_2,$$

$$R_1 j_1 = \frac{1}{C}\int_0^t j_2(t)dt,$$

以及

$$v_1 = R_1 j_1 + R_2 j,$$

$$v_2 = R_2 j.$$

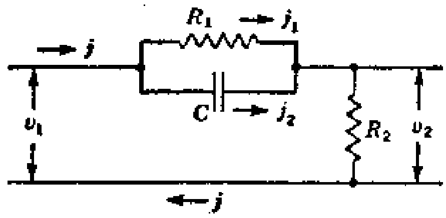



圖 3.15

相當的拉氏變換的方程就是：

$$J = J_1 + J_2,$$

$$R_1 J_1 = \frac{1}{Cs} J_2,$$

以及

$$V_1 = R_1 J_1 + R_2 J,$$

$$V_2 = R_2 J.$$

因此

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = F(s) = \frac{R_2 + R_1 R_2 Cs}{(R_1 + R_2) + R_1 R_2 Cs}.$$

放大就是

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = r, \tag{3.25}$$

$K$ 當然是小於 1 的，通常是在 0.1 和 1 之間。如果我們引進符號 $\omega_1$，

$$\omega_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}, \tag{3.26}$$

那末，傳遞函數就可以改寫成

$$F(s) = r\,\frac{1 + (s/r\omega_1)}{1 + (s/\omega_1)}. \tag{3.27}$$

因此，傳遞函數在 $-r\omega_1$ 有一個零點，在 $-\omega_1$ 有一個極點。

頻率特性就是

$$F(i\omega) = \frac{r\omega_1 + i\omega}{\omega_1 + i\omega}. \tag{3.28}$$

如果我們引進無量綱頻率

$$u = \frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\omega}{\omega_1}, \tag{3.29}$$

那末

$$M = \sqrt{r}\sqrt{\frac{1 + (u^2/r)}{(1/r) + u^2}}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{r}} - \tan^{-1}(\sqrt{r}\,u). \tag{3.30}$$

於是有

$$\log_{10} M(u) = \log_{10}\sqrt{r} + \log_{10}\sqrt{\frac{1+(u^2/r)}{(1/r)+u^2}}$$
$$= \log_{10}\sqrt{r} - \log_{10}\sqrt{\frac{1+(1/ru^2)}{(1/r)+(1/u^2)}},$$

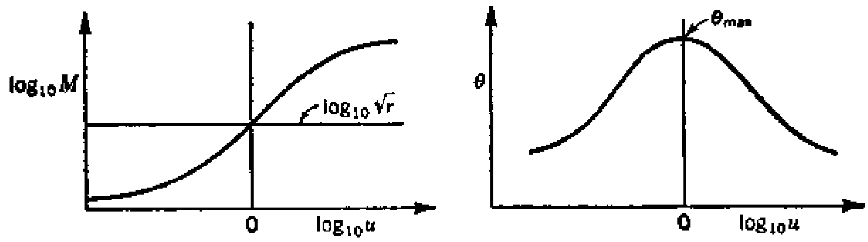
而且

$$\theta(u) = \theta\left(\frac{1}{u}\right).$$

因此，就像圖 3.16 所表示的那樣，伯德圖的圖綫對於 $u=1$（也就是 $\log_{10} u = 0$）有着對稱性。 $\theta$ 的極大值 $\theta_{max.}$ 是在 $u=1$ 點，並且等於

$$\theta_{max.} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{r}} - \tan^{-1}\sqrt{r} = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}\sqrt{r}. \tag{3.31}$$

因此，這個電路在一個頻帶（頻率範圍）上給出相當大的相角超前。 對於非常大的 $\omega$ 值，$M=1$；對於非常小的 $\omega$ 值，$M=r$。




$F(i\omega)=\frac{r\omega_1+i\omega}{\omega_1+i\omega}$, $u=\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\omega}{\omega_1}$

圖 3.16

**頻帶的相角落後電路** 圖 3.17 所表示的電阻電容電路的傳遞函數是

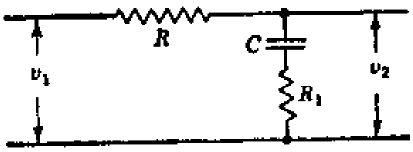



圖 3.17

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = F(s) = \frac{1+R_1Cs}{1+(R_1+R)Cs}.$$

所以，這個系統的放大是 1。 如果我們引進這樣定義的兩個參數 $\omega_1$ 和 $r$：

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1C}, \quad r = \frac{R_1}{R+R_1}, \tag{3.32}$$

那末，傳遞函數就可以改寫成

$$F(s) = \frac{1+(s/\omega_1)}{1+(s/r\omega_1)}. \tag{3.33}$$

把這個方程和相角超前電路的方程(3.27)加以比較，我們就可以看到這兩個電路的傳遞函數（除了一個常數的因數之外）是互爲倒數的。 其實，目前這個電路的頻率特性也可以寫成：

$$F(i\omega) = \frac{1+i(\omega/\omega_1)}{1+i(\omega/r\omega_1)} = \frac{1+i\sqrt{r}\,u}{1+i(1/\sqrt{r})u}$$

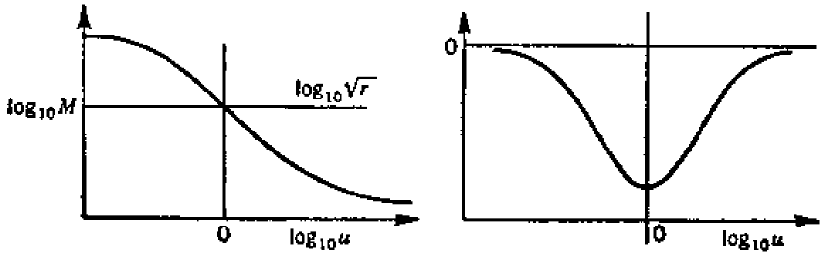
其中，$u$ 是無量綱頻率

$$u = \frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\omega}{\omega_1}. \tag{3.34}$$

因此，

$$M = \sqrt{r}\sqrt{\frac{(1/r)+u^2}{1+(u^2/r)}}, \quad \theta = \tan^{-1}(\sqrt{r}\,u) - \tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{r}}. \tag{3.35}$$

圖 3.18 就是這個系統的伯德圖．從圖中我們可以看出，在 $u = 1$ 附近的一個頻率上有着顯著的相角落後．極大的相角落後發生在 $u = 1$ 點，也就是頻率 $\omega = \sqrt{r}\,\omega_1$ 的時候，它的大小也還是方程(3.31)所給的 $\theta_{\max}$．




$$F(i\omega) = \frac{1+i\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1+i\dfrac{\omega}{r\omega_1}}, \qquad u = \frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\omega}{\omega_1}$$

圖 3.18

**簡化的飛機的橫滾運動**　假設飛機對於縱軸的轉動慣量是 $I$，$\phi$ 是滾動角，$L_p$ 是關於滾動的空氣動力阻尼系數，$\delta$ 是副翼的傾斜度，$k\delta$ 是由於副翼傾斜而引起的力偶矩．滾動角 $\phi$ 的微分方程就是

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} + L_p\frac{d\phi}{dt} = k\delta.$$

設 $p = d\phi/dt$ 是滾動速度；以上的微分方程就變成

$$I\frac{dp}{dt} + L_p p = k\delta,$$

如果 $t = 0$ 時的滾動速度是 0，那末，作過拉氏變換的方程就是

$$(Is + L_p)P(s) = k\Delta(s),$$

因此，傳遞函數 $F(s)$ 就是

$$\frac{P(s)}{\Delta(s)} = F(s) = \frac{k}{Is+L_p} = \frac{k}{L_p}\frac{1}{1+(I/L_p)s}. \tag{3.36}$$

正如方程(3.36)所示，這個系統的運動狀態和具有阻尼器的懸臂彈簧以及簡單的相角落後電路的運動狀態是相似的．在這裏，時間常數 $\tau_1$ 是 $I/L_p$，如果阻尼系數 $L_p$ 非常小，時間常數 $\tau_1$ 就接近於 $\infty$，系統的運動狀態就和簡單的積分元件的情况一樣了．

## 3.4 二階系統

我們再回到具有阻尼器的懸臂彈簧的情形(圖 3.1)．不過，現在我們在阻尼器這一端加上一個質量 $m$．這個質量引起一個慣性力 $md^2y/dt^2$，因而運動方程就變爲

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = kx,$$

假定初始條件是：

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= y_0, \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} &= y_0^{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

引進下列兩個參數以後，就可以把微分方程改寫為更方便的形式：

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{k}{m}, \\ \zeta &= \frac{c/m}{2\omega_0}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

$\omega_0$ 就是當阻尼器不存在時的質量彈簧系統的自然頻率. $\zeta$ 就是實際的阻尼和臨界阻尼的比值. 這一無量綱的參數的物理意義在以下的討論中可以說明得更加清楚. 這樣一來，運動方程就變成

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 x. \tag{3.39}$$

方程(3.39)連同它的初始條件(3.37)用拉氏變換的方式就可以表示為下列的方程：

$$(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)Y(s) = \omega_0^2 X(s) + y_0^{(1)} + (s + 2\zeta\omega_0)y_0.$$

由於初始條件而產生的輸出就是

$$Y_c(s) = \frac{y_0 s + (y_0^{(1)} + 2\zeta\omega_0 y_0)}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}. \tag{3.40}$$

而傳遞函數就是

$$F(s) = \frac{Y_i(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s/\omega_0)^2 + 2\zeta(s/\omega_0) + 1}. \tag{3.41}$$

因此，系統的放大 $K = 1$，而且傳遞函數沒有零點. 但是它有兩個單極點 $s_1$ 和 $s_2$. 在 $\zeta^2 > 1$ 時，$s_1$ 和 $s_2$ 就是

$$\left.\begin{aligned} \frac{s_1}{\omega_0} &= -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}, \\ \frac{s_2}{\omega_0} &= -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}, \end{aligned}\right\} \quad \zeta^2 > 1. \tag{3.42}$$

當阻尼器的阻尼系數 $c$ 比臨界阻尼 $2\sqrt{mk}$ 小的時候，$\zeta$ 的數值就會比 1 小. 在那種情況下，極點 $s_1$ 與 $s_2$ 是複共軛的，它們的實數部分和虛數部分分別是 $\lambda$ 和 $\nu$：

$$\left.\begin{aligned} s_1/\omega_0 &= -\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2} = (\lambda + i\nu)/\omega_0 = e^{i\varphi_1}, \\ s_2/\omega_0 &= -\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2} = (\lambda - i\nu)/\omega_0 = e^{-i\varphi_1}, \end{aligned}\right\} \quad \zeta^2 < 1, \tag{3.43}$$

因為 $s_1/\omega_0$ 和 $s_2/\omega_0$ 的絕對值都是 1，所以可以寫成 $e^{\pm i\varphi_1}$ 的形式. 如果阻尼系數 $c$ 是正的，$\lambda$ 就是一個負數.

由方程(3.40)很容易就可以確定由於初始條件而產生的輸出 $y_c(t)$. 對於 $\zeta^2 < 1$ 的情形，傳遞函數的極點是由方程(3.43)所確定的，我們就有

$$y_c(t) = \frac{y_0^{(1)}}{\nu} e^{\lambda t}\sin\nu t + y_0 e^{\lambda t}\cos\nu t + \frac{-\lambda}{\nu} y_0 e^{\lambda t}\sin\nu t. \tag{3.44}$$

既然 $\lambda$ 是一個負數，輸出 $y_c(t)$ 就是衰減的，不過它是一個衰減的正弦式的函數，也就是說它是一個衰減的振盪. 但是，對於 $\zeta^2 > 1$ 的情形來說，輸出 $y_c(t)$ 就是一個單純的衰

減，因此，如果阻尼系數 $c$ 大於臨界阻尼 $2\sqrt{mk}$ 的話，輸出 $y_c(t)$ 就沒有振盪，這就是臨界阻尼的物理意義。

現在，我們假定輸入 $x(t)$ 是圖 3.3 所表示的單位階躍函數 $\mathbf{1}(t)$。這時 $X(s)=1/s$，對於 $\zeta^2<1$ 的情形，

$$Y_i(s)=\frac{\omega_0^2}{s[(s-\lambda)^2+\nu^2]}.$$

因此，由於輸入而產生的輸出 $y_i(t)$ 就是

$$y_i(t)=1-\left[\cos\nu t+\left(\frac{-\lambda}{\nu}\right)\sin\nu t\right]e^{\lambda t}. \tag{3.45}$$

對於 $\zeta^2>1$ 的情形，輸出 $y_i(t)$ 就不是振盪的，並且由下式表示：

$$y_i(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{e^{s_1t}}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}-\frac{e^{s_2t}}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}\right], \tag{3.46}$$

其中的 $s_1$ 和 $s_2$ 是由方程(3.42)所給定的。在圖 3.19 中，對於若干不同的阻尼比值 $\zeta$，畫出了輸出 $y_i(t)$ 的運動狀態。可以看出來，如果希望輸出 $y_i(t)$ 最快地接近於穩態值，$\zeta$ 的值就不應該太大。可是，從另外一方面來說，如果 $\zeta$ 太小，就會發生持續較久的振盪，而且超過穩態值的超調量也會變得相當大。因此，在實際工程問題中就必有一個折衷的辦法，在普通的工程實踐裏，總是把 $\zeta$ 的值取在 0.4 和 1 之間。

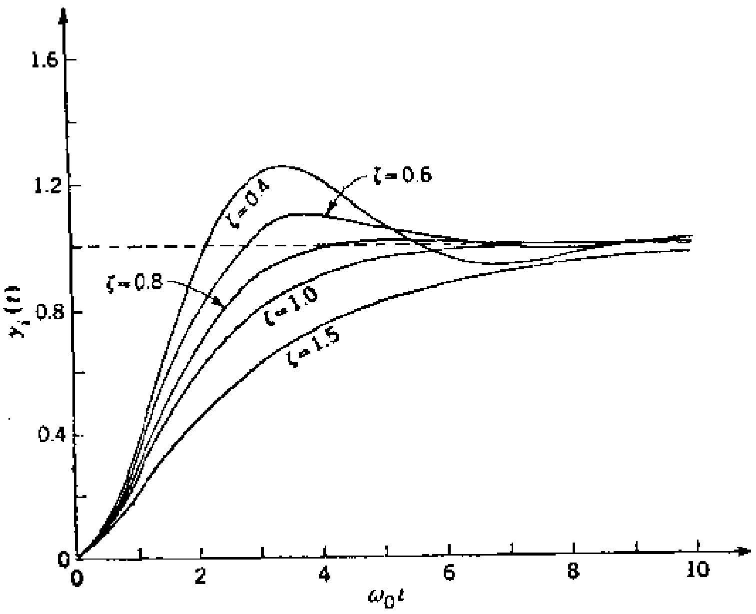



圖 3.19

如果輸入是一個正弦式的振盪，和方程(3.11)所表示的一樣，振幅是 $x_m$，角頻率是 $\omega$，那末，

$$Y_i(s)=\frac{x_m}{s-i\omega}F(s)=\frac{x_m}{s-i\omega}\frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}.$$

因此，在 $\zeta^2<1$ 的情形裏，輸出 $y_i(t)$ 就是

$$y_i(t)=x_mF(i\omega)e^{i\omega t}+\frac{x_m}{2i\nu}\frac{\omega_0^2}{\lambda+i(\nu-\omega)}e^{(\lambda+i\nu)t}$$

$$-\frac{x_m}{2i\nu}\frac{\omega_0^2}{\lambda-i(\nu-\omega)}e^{(\lambda-i\nu)t}, \tag{3.47}$$

這裏的 $\lambda$ 和 $\nu$ 是由方程(3.43)所給定的。 既然對於正的阻尼，$\lambda$ 是負數，所以，穩態的輸出也還是方程(3.47)的第一項。 這個事實和我們的普遍性的結果——方程(2.16)是相符合的。

根據方程(3.41)，這個二階系統的頻率特性就是

$$F(i\omega) = Me^{i\theta} = \frac{1}{[1-(\omega/\omega_0)^2] + 2i\zeta(\omega/\omega_0)}.$$

因此[1]

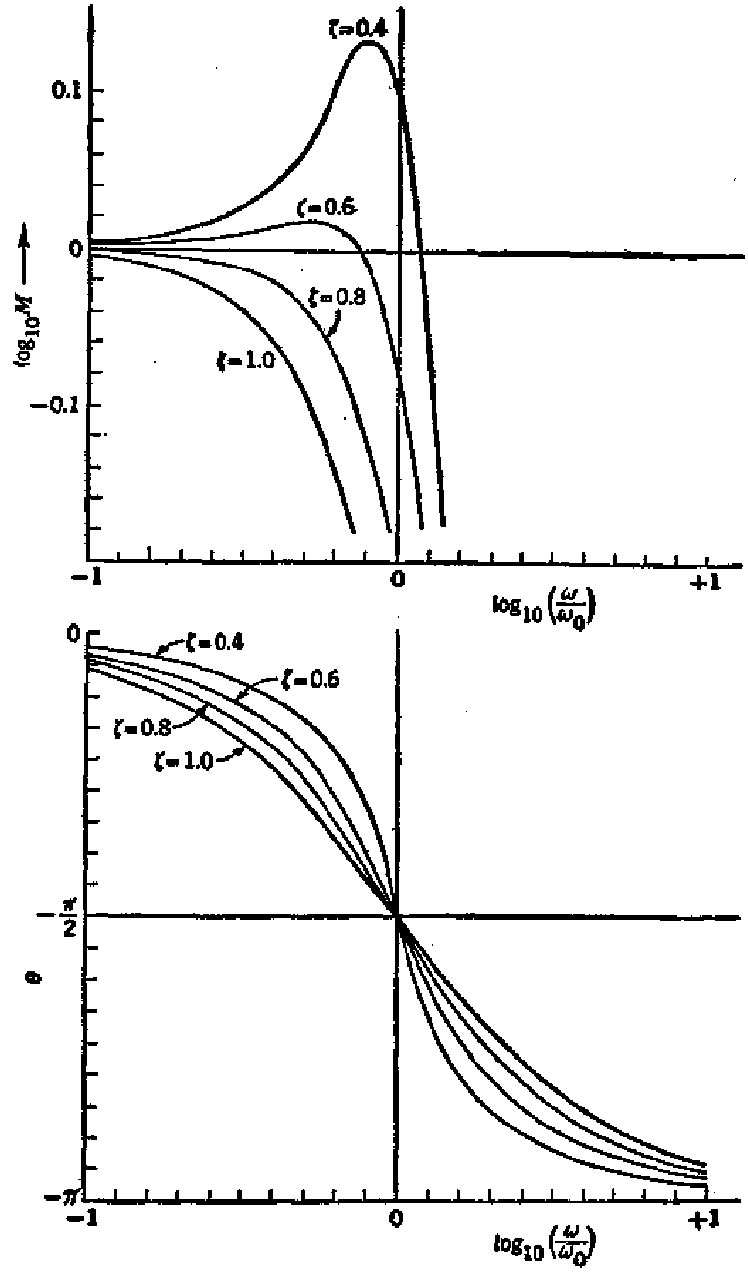



圖 3.20

1) 利用 $M$ 和 $\theta$ 估計系統性質的問題可以參閱 [9, 16].

$$M = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_0)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_0)]^2}},$$

而

$$\tan\theta = -\frac{2\zeta(\omega/\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)^2}. \qquad (3.48)$$

這個系統的伯德圖就是圖 3.20。 $M$ 的極大值發生在 $\omega/\omega_0 = 1$ 附近，這時 $M \approx \frac{1}{2}\zeta$，而 $\theta \approx -\pi/2$。當 $\omega/\omega_0 \to \infty$ 時，$\theta \to -\pi$，而 $M \sim 1/(\omega/\omega_0)^2$，也可以說 $\log M \sim -2\log(\omega/\omega_0)$。

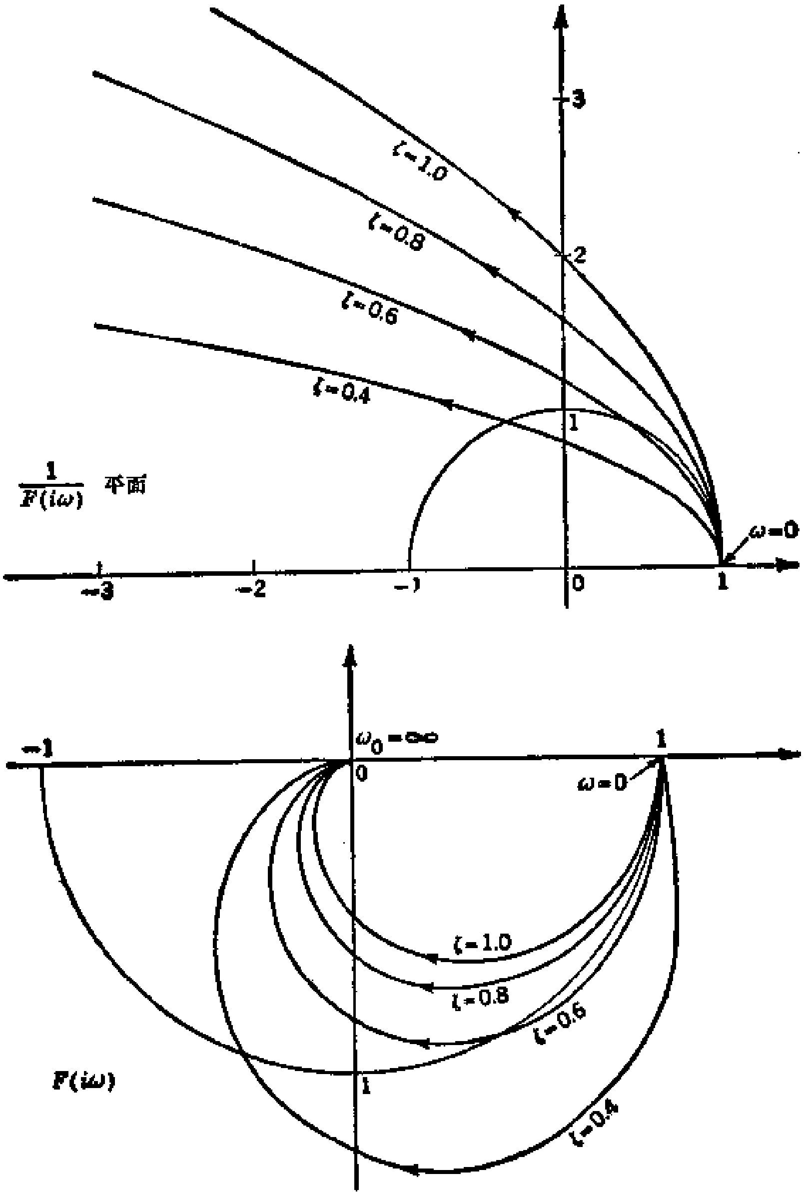



圖 3.21

用聲學工程師的術語來說也就是：對於高頻率，斜率是每個倍頻程 −12.04 分貝（−12.04 db/oct）.

圖 3.21 就是這個二階系統的乃氏圖.

其他的物理系統往往也可以近似地看作是二階系統. 液壓伺服馬達就是一個例子. 3.3 節裏討論過的迴轉測速計的更近似於實際運動狀態的傳遞函數就是

$$F(s)=\frac{Ks}{(s/\omega_0)^2+2\zeta(s/\omega_0)+1},$$

應該把這個更精確的傳遞函數和那個在圖 3.11 中所表示的傳遞函數比較一下. 加速度計的傳遞函數就是

$$F(s)=\frac{Ks^2}{(s/\omega_0)^2+2\zeta(s/\omega_0)+1}.$$

如果把一個電動機當作一個積分元件看待的話（這也就是說，把電壓 $v$ 看作輸入，把電動機轉子的轉角 $\varphi$ 看作輸出量，而不是把轉子的速度 $d\varphi/dt$ 看作輸出），更精確的傳遞函數就是

$$F(s)=\frac{K}{s(\tau_1 s+1)},$$

也應該把這個傳遞函數和以前在圖 3.8 中所表示的那個粗略的近似的傳遞函數比較一下. 以上這些傳遞函數的分母都是一個二次多項式. 這個多項式的各個常數系數的意義和前面討論過的例子裏的系數的意義是類似的.

### 3.5 確定頻率特性的方法

在以前各節的討論裏，我們所考慮的問題的性質都是這樣的：假定已經知道一個系統的詳細的構造，根據這些知識和基本的物理定律算出系統的傳遞函數 $F(s)$ 和頻率特性 $F(i\omega)$. 不難看出，這種確定頻率特性的方法是一種理論的方法，它的結果的精確度完全依賴於我們對於系統的瞭解的精確程度. 可是，在工程實踐中，我們往往對於系統的詳細構造知道得很不完備；也有時候，雖然對系統的詳細構造知道得很清楚，但是系統過於複雜，以至於使頻率特性的理論計算作起來也過分繁重. 在這樣一些情況中，我們常常用實驗方法來確定系統的頻率特性. 我們最容易想到的方法就是利用方程(2.16)所表示的這樣一個事實：在頻率是 $\omega$ 的正弦式的輸入下，穩態輸出和輸入的比值就是頻率特性 $F(i\omega)$. 輸出的振幅和輸入的振幅的比值就是 $M$. 輸出和輸入的相角差就是 $\theta$. 因此，如果用實驗方法來確定頻率特性就必須在所需用的頻率範圍之內. 對於若干特殊的頻率值 $\omega$ 測量振幅比值和相角差. 事實上，確實也曾經把這個方法用到某些系統上去過，例如，比較簡單的油泵系統[1]和相當複雜的整個飛機的縱向運動的系統[2]. 這個方法的缺點是：對於一個比較寬的頻率範圍就常常需要對很多不同的頻率 $\omega$ 的值作很多的測量. 並且有時候也很難測量輸出和輸入的相角差.

另外一個更有效的方法就是：同時激發起所有的頻率，而不是對各個頻率進行個別的

1) H. Shames, S. C. Himmel, D. Blivas, *NACA TN* 2109 (1950).

2) W. F. Milliken, *J. Aeronaut. Sci.*, **14**, 493 (1947); 也可以參閱[17—21].

激發． 為了達到這個目的，最好的辦法就是用一個單位冲量作輸入． 這時，根據方程(2.18)，對於穩定系統($\gamma = 0$)來說，

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}d\omega$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} [\Re F(i\omega)\cos\omega t - \Im F(i\omega)\sin\omega t]\, d\omega, \tag{3.49}$$

其中 $\Re$ 和 $\Im$ 分別表示實數部分和虛數部分的符號． 這個方程的第二個等式可能是由於有關係式(3.17)的緣故． 方程(3.49)表明，輸入的單位冲量均等地激起了所有的頻率(這也就是說，各個頻率的振幅都是同一數量級的)． 當系統對單位冲量的反應 $h(t)$ 已經知道的時候(我們只要作一次實驗就可以測出 $h(t)$)，我們就可以用下列公式計算頻率特性．

$$F(i\omega) = \int_{0}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{3.50}$$

對於任何一個固定的 $\omega$ 值，我們都可以用數值積分的方法算出這個積分．

然而，實際上，一個理想的冲量是很難真正作出來的．比較實際可行的輸入是矩形的脈冲和三角形的脈冲，就像圖 3.22 所表示的那樣．這樣一些脈冲當然不能均等地激起所有的頻率．但是，如果我們把脈冲的長度 $\tau$ 作得相當小的話，也就可以認為，已經相當理想地達到了均勻地激起所有頻率的目的．西門斯(R. C. Seamans)和他的同事們就曾經用這種冲量激發的方法去確定一架飛機的頻率特性[1]． 他們還提出一種根據測量到的輸出 $y(t)$ 計算 $F(i\omega)$ 的近似方法．克爾夫曼(H. J. Curfman)和格第內爾(R. A. Gardiner)[2] 把這種處理實驗數據的方法又推廣到輸入是任意形式的情形中去．

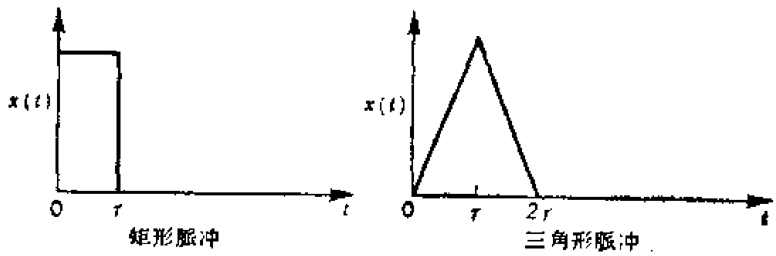



圖 3.22

### 3.6 由多個部件組成的系統

在 3.1 節，3.3 節和 3.4 節所討論過的那些系統實際上只不過是某些更複雜的系統的部件而已．實際工程中，穩定裝置和控制裝置所需要的却常常是這種複雜的系統． 以飛機的橫滾運動為例．通常是用電流作控制副翼轉動的信號．這個電流信號就是一個包含放大器和計算裝置的部件的輸入，在這個部件裏當然包含會有某種電路，也還可能包含一些電子管． 這個由放大器和計算裝置所組成的部件的運動狀態是由它的傳遞函數 $F_1(s)$ 所確定的．再把這個部件的輸出取作轉動副翼的液壓伺服馬達的輸入．液壓伺服馬達的運動狀態是由傳遞函數 $F_2(s)$ 所描述的．最後，把伺服馬達的輸出，也就是副翼的轉動，取作那個代表飛機的橫滾動力特性的系統的輸入；假設飛機的動力特性用傳遞函數 $F_3(s)$ 來表示；那末，橫滾動力特性系統的輸出就是飛機的橫滾運動了．這裏，從滾動的控制信號

1) R. C. Seamans, B. P. Blasingame, G. C. Clementson, *J. Aeronaut. Sci.*, **17**, 22 (1950).
2) H. J. Curfman and R. A. Gardiner, *NACA TR* 984 (1950).

到滾動運動，在系統的各個部件之間有着一系列的聯系．如果用 $x(t)$ 表示控制滾動的信號，用 $\phi(t)$ 表示飛機的橫滾角的話，那末，相當的拉氏變換的關係就是

$$\Phi_l(s) = F_3(s)F_2(s)F_1(s)X(s).$$

因此，整個的橫滾控制系統的傳遞函數就是乘積 $F_3(s)F_2(s)F_1(s)$．從這個例子也還能很清楚地看到這樣一個事實：一般說來，傳遞函數是有量綱的，因爲它是兩個不同量綱的物理量的比值．在現在的這個例子裏，作爲輸入的滾動信號是一個電流，可是作爲輸出的橫滾角却是一個角度，電流的量綱和角度的量綱當然是不同的．

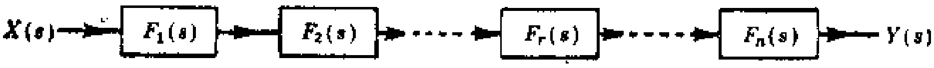



圖 3.23

一般說來，如果一個系統是由 $n$ 個個別的部件串聯組成的(圖 3.23)，並且假設這些部件的傳遞函數分別是 $F_1(s)$, $F_2(s)$, $\cdots$, $F_r(s)$, $\cdots$, $F_n(s)$，而放大分別是 $K_1$, $K_2$, $\cdots$, $K_r$, $\cdots$, $K_n$，那麽，整個系統的傳遞函數 $F(s)$ 就是

$$F(s) = F_1(s)F_2(s)\cdots F_r(s)\cdots F_n(s). \tag{3.51}$$

整個系統的放大 $K$ 就是

$$K = K_1K_2\cdots K_r\cdots K_n. \tag{3.52}$$

從方程(3.51)很明顯地看出，在一個系統裏傳遞函數 $F(s)$ 的零點和極點也就是各個個別部件的零點和極點的全體(當然也可能有某一個部件的零點和另外一個部件的極點互相抵消的情形)．因此，如果再用方程(3.52)算出整個系統的放大 $K$．傳遞函數 $F(s)$ 就完全被確定了．

系統的頻率特性是 $F(i\omega)=Me^{i\theta}$．如果第 $r$ 個部件的頻率特性是 $M_re^{i\theta_r}$ 的話，那末，根據方程(3.51)就有

$$\begin{aligned}Me^{i\theta} &= (M_1e^{i\theta_1})(M_2e^{i\theta_2})\cdots(M_re^{i\theta_r})\cdots(M_ne^{i\theta_n})\\ &= (M_1M_2\cdots M_r\cdots M_n)\,e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_r+\cdots+\theta_n)}.\end{aligned}$$

所以

$$\left.\begin{aligned}\log_{10}M &= \log_{10}M_1+\log_{10}M_2+\cdots+\log_{10}M_r+\cdots+\log_{10}M_n,\\ \text{而}\quad \theta &= \theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_r+\cdots+\theta_n.\end{aligned}\right\} \tag{3.53}$$

由方程(3.53)就可以理解在伯德圖中爲什麽要採用對數尺度的理由．採用了對數尺度以後，就可以使尋求系統的特性的工作大大地簡化了，因爲只要把各個組成部件的伯德圖綫的坐標簡單地疊加起來就行了．

### 3.7 超越的傳遞函數

不只是常係數綫性常微分方程的初值問題可以用拉氏變換法來解，對於綫性偏微分方程的情况[1](具有分佈參數的控制系統的微分方程就常常是偏微分方程)，只要方程的系

1) 可以參考 H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, "Operational Methods in Applied Mathematics", Oxford University Press, New York, 1941; 或 R. V. Churchill, "Modern Operational Methods in Engineering," McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1944.

數與時間自變數 $t$ 無關，而且邊界條件中關於 $t$ 的部分可以用對時間變數 $t$ 而言的初值條件來敍述，那末，拉氏變換法還是可用的．作過拉氏變換以後，原來的偏微分方程中的時間自變數 $t$ 就被消去了，同時也就出現了一個新的參數 $s$．原來的方程就變成一個對於其餘的自變數的微分方程(因爲 $s$ 並不是新微分方程的自變數)．然後，就可以用其餘的邊界條件把這個微分方程解出來．這樣得到的解裏，當然包含了參數 $s$．把這個解進行拉氏反變換就可以得到原來的偏微分方程的解了．這種解法的手續顯然是比第二章討論過的常微分方程的解法複雜得多．但是，從另一方面來看，如果在變換後的方程的解裏把任意兩個特定的量加以比較，我們可以看到，它們之間的關係仍然是綫性的．如果把其中的一個看作是輸入，把另外一個看作是輸出的話，那末，它們的比值還是一個 $s$ 的函數，我們也還把這個函數看作是傳遞函數 $F(s)$．不過，有一點是不同的：這個傳遞函數不再是兩個 $s$ 的多項式的比值了，一般地說，它是一個 $s$ 的超越函數．

現在我們來舉兩個例子：

首先，我們考慮這樣一個傳熱問題：有一座墻壁(例如爐壁)(圖 3.24)，它的厚度是 $l$，寬度和高度都可以認爲是無限大的．墻的導熱系數是 $k$．熱容量(也就是密度和比熱的乘積)是 $c$．墻的左面(也就是坐標 $x=0$ 的地方)的溫度是一個已知的時間函數 $u=u(t)$，墻的右面(也就是 $x \geqslant l$ 的區域)是熱絕緣的．假定墻的初始溫度是 0．很明顯，墻內各點的溫度 $\theta$ 必然是坐標 $x$ 和時間 $t$ 的函數 $\theta=\theta(x,t)$．$\theta$ 的微分方程是

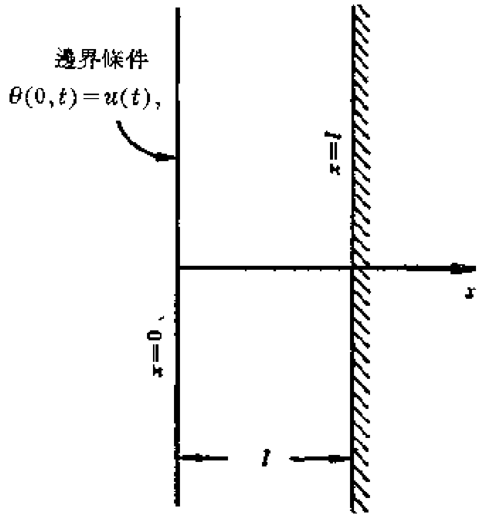



圖 3.24

$$k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=c\frac{\partial\theta}{\partial t}, \tag{3.54}$$

初始條件是

$$\theta(x,0)=0, \tag{3.55}$$

邊界條件是

$$\theta(0,t)=u(t), \tag{3.56}$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=l}=0. \tag{3.57}$$

現在我們用拉氏變換法解這個問題：$\theta$ 的拉氏變換是

$$\Theta(x,s)=\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt. \tag{3.58}$$

$u$ 的拉氏變換是

$$U(s)=\int_0^\infty e^{-st}u(t)dt.$$

把方程(3.58)對 $x$ 微分兩次,就得出 $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ 的拉氏變換:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=\int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}dt. \tag{3.59}$$

$\frac{\partial\theta}{\partial t}$ 的拉氏變換就是

$$\int_0^\infty\frac{\partial\theta}{\partial t}\ e^{-st}dt=\Big[\theta\, e^{-st}\Big]_{t=0}^{t=\infty}+s\int_0^\infty\theta e^{-st}\,dt=\Big[\theta\, e^{-st}\Big]_{t=0}^{t=\infty}+s\Theta.$$

因為 $t\to\infty$ 時, $e^{-st}\to 0$, 而 $t=0$ 時, $\theta=\theta(x,0)=0$,所以 $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ 的拉氏變換是

$$\int_0^\infty\frac{\partial\theta}{\partial t}\,e^{-st}dt=s\Theta. \tag{3.60}$$

因此,把方程(3.54)對變數 $t$ 作拉氏變換就得

$$k\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=cs\Theta. \tag{3.61}$$

把邊界條件(3.56)和(3.57)也加以變換,就得到:

$$\text{當 } x=0 \text{ 時},\quad \Theta=\Theta(0,s)=U(s), \tag{3.62}$$

$$\text{當 } x=l \text{ 時},\quad \frac{\partial\Theta}{\partial x}=\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big|_{x=l}=0, \tag{3.63}$$

把 $s$ 看作參數,方程(3.61)就成為常微分方程

$$k\frac{d^2\Theta}{dx^2}=cs\Theta.$$

也就是

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2}-\frac{cs}{k}\Theta=0. \tag{3.64}$$

設

$$\beta^2=\frac{cs}{k},$$

那末,考慮到邊界條件(3.62)和(3.63),方程(3.64)的解就是

$$\Theta=\Theta(x,s)=U(s)\frac{\operatorname{ch}\beta(l-x)}{\operatorname{ch}\beta l}. \tag{3.65}$$

對於具體的函數 $U(s)$, 我們就可以把方程(3.65)進行拉氏反變換而最後得到原來問題的解 $\theta=\theta(x,t)$.

如果把墻的左面的溫度 $U(s)$ 看作這個系統的輸入,把墻的右面的溫度 $\Theta(l,s)$ 看作系統的輸出,那末,根據方程(3.65),系統的傳遞函數就是

$$F(s)=\frac{\Theta(l,s)}{U(s)}=\frac{1}{\operatorname{ch}\beta l}=\frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{cs}{k}}\,l}. \tag{3.66}$$

這個傳遞函數就是 $s$ 的超越函數.

其次,我們再來考慮一個二維機翼理論的問題[1]. 在以均勻的水平速度 $U$ 流動的氣

1) W. R. Sears, *J. Aeronaut. Sci.*, 8, 104 (1941).

流裏，有一個弦長是 $c$ 的機翼(圖 3.25)．假定氣流又在鉛直方向上發生了一個擾動速度 $v$．如果 $v$ 對於水平坐標以及對於時間 $t$ 都是正弦函數的話，$v$ 就可以表示爲

$$v(x,\ t) = \alpha_m U e^{i\omega[t-(x/U)]}, \tag{3.67}$$

這裏，$\alpha_m$ 是振幅，$\omega$ 是"頻率"．西爾思(W. R. Sears)曾經考慮了這樣一個擾動速度 $v$．對於舉力系數 $C_l$ 的影響("舉力係數"就是機翼上每單位面所受到的平均舉力被"動力壓

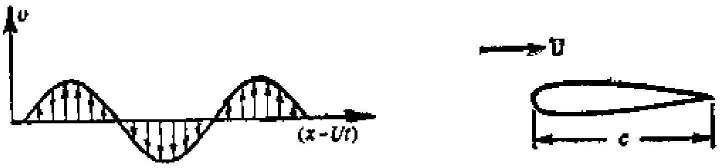



圖 3.25

力" $\frac{1}{2}\rho U^2$ 除所得到的商數，這裏的 $\rho$ 是氣體的密度)．他證明

$$C_l = 2\pi\alpha_m e^{i\omega t}\varphi(k), \tag{3.68}$$

其中

$$k = \frac{\omega c}{2U}, \tag{3.69}$$

而

$$\varphi(k) = \frac{J_0(k)K_1(ik) + iJ_1(k)K_0(ik)}{K_1(ik) + K_0(ik)}. \tag{3.70}$$

這裏的 $J_0$ 和 $J_1$ 表示第一種貝塞爾(Bessel)函數，$K_0$ 和 $K_1$ 表示第二種變態的貝塞爾函數．因此，如果把 $v(0,\ t)$ 的拉氏變換 $X(s)$ 取作輸入，把 $C_l(t)$ 的拉氏變換 $Y(s)$ 取作輸出，那末，傳遞函數 $F(s)$ 就是

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = F(s),$$

而頻率特性 $F(i\omega)$ 就是

$$F(i\omega) = \frac{2\pi}{U}\varphi(k). \tag{3.71}$$

所以，頻率特性是 $\omega$ 的超越函數．

此外，如果系統中包含有時滯(參閱第八章)的部件[18-22]，那末，系統的傳遞函數也會是超越函數．

都根基(J. Dugundji)曾經把超越傳遞函數和超越頻率特性的概念應用到飛機的機翼顫震問題的研究上去[1]．

---

1) J. Dugundji, *J. Aeronaut. Sci.*, **19**, 422 (1952).

# 第 四 章

# 反 饋 伺 服 系 統

在這一章裏，我們將要介紹近代的調節技術和控制技術中最重要的一個概念：反饋的概念．我們將要借助於最簡單的系統——常系數綫性系統的討論來引進這個概念．同時，我們還要說明，爲什麼採用反饋方法就能够使系統大大地增加控制的準確度，並且顯著地提高對於控制信號的反應速度．最後，我們還要講解一下保證反饋伺服系統的穩定性並且使它具有最好的運轉性能的設計原則．

## 4.1 反饋的概念

讓我們來考慮控制渦輪發電機的轉速的問題．在這裏，最重要的要求就是使轉速非常接近於額定的固定數值，而不要發生較大的偏差．對於這個問題來說，最初等的處理方式就是所謂開路控制的方法，採用這種控制方法的時候，我們就必須隨時設法使汽渦輪機所產生的轉矩、發電機本身所需要的轉矩和負載轉矩處於平衡狀態，具體地說，我們可以這樣作：隨時用儀表測量負載的數值，並且隨時根據測量的結果調節汽渦輪機的閥門．但是，可以想像到，這種平衡的方法不可能是完全精確的，總會存在一個偏差轉矩 $x(t)$．這個偏差轉矩的存在就要使發電機的轉動產生加速度．如果我們用 $y(t)$ 表示實際轉速和額定轉速之間的偏差，用 $I$ 表示發電機的轉動部分的轉動慣量，用 $c$ 表示磨擦損失的阻尼系數．那末，微分方程就是

$$I\frac{dy}{dt}+cy=x(t). \tag{4.1}$$

圖 4.1 就是這個開路控制系統的方塊圖．我們看到，這個系統與第三章研究過的一階系統是相似的．這個系統的時間常數是 $I/c$，偏差轉速的穩態值和偏差轉矩的比值是 $1/c$．因爲渦輪發電機的轉子的重量很大，所以 $I$ 是一個很大的數值；但是，因爲磨擦損失相當小，所以 $c$ 也就是一個很小的數值；由此可見，時間常數 $I/c$ 就是一個非常大的數值，這也就意味着，任意一個轉速的偏差都要保持很久的時間，而且很難使它迅速地消失掉．不僅如此，由於系統的放大 $1/c$ 很大，所以，如果希望偏差轉速相當小，就必須要求偏差轉矩極端地微小．不言而喻，這樣一個目的在於維持發電機轉速不變的開路控制系統，在實際工程中是十分無用的．

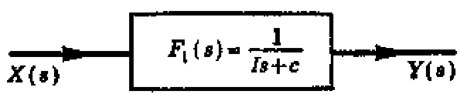


圖 4.1

現在，我們再來看一看，把開路系統改爲具有反饋作用的所謂閉路控制系統以後，系統的運轉性能發生怎樣的變化．進行閉路控制的時候，我們使對系統起控制作用的力矩與被控制的變數發生關係．這也就是說，蒸汽閥門的調節不僅要依據負載的情況，而且

也還要和偏差速度 $y$ 有關係．假定控制轉矩的第二個組成部分與 $y$ 成比例，比例常數是 $-k(k>0)$．當轉速過高，也就是 $y>0$ 的時候，就把閥門關閉起來，同時，使發電機加速的轉矩減少 $ky$．如果轉速過低，也就是 $y<0$ 的時候，使發電機加速的力矩就會增加 $ky$．因此，現在 $y$ 的微分方程就變為

$$I\frac{dy}{dt}+cy=x-ky,$$

也就是

$$I\frac{dy}{dt}+(c+k)y=x(t). \tag{4.2}$$

方程(4.2)與方程(4.1)唯一的不同之點就是把 $c$ 換成了和數 $c+k$．現在，時間常數就變為 $I/(c+k)$，而偏差轉速的穩態值與不變的偏差轉矩的比值就變成 $1/(c+k)$．因此，與開路控制系統相比較，只要我們使 $k$ 比 $c$ 大得很多的話，就可以使時間常數和偏差轉速大大地減小．因為 $c$ 很小，所以，實際上使 $k\gg c$ 也是很容易的．從這個例子可以看到，其餘的條件都不必加以改變，只要把開路控制系統加上一個反饋綫路使它變為閉路控制系統的話，系統的反應速度和控制的精確度就可以提高很多，因而也就可以大大地改進控制系統的性能．

圖 4.2 就是上述的閉路控制系統的方塊圖．圖中代表汽輪發電機的原有的傳遞函數 $F_1(s)$ 和圖 4.1 裏的 $F_1(s)$ 還是相同的．在圖 4.2 裏，我們還引進了伺服控制工程中的一個規定：在表示混合器（也有時稱為比較元件）的符號“⊗”旁邊必須用加號或者減號註明混合器對於相當的輸入信號的作用．例如圖 4.2 中的混合器的輸入信號是 $X(s)$ 和 $kY(s)$，根據圖上標明的作用符號，混合器的輸出信號就是 $X(s)-kY(s)$．如果在兩條綫路的接合點上只畫了一個圓點，就表示對那裏的信號只有“測量”作用，並沒有相加或相減的作用（在這一點上表示控制系統的構造的方塊圖和普通的電路圖是不相同的），因此，圖 4.2 表示偏差轉速 $y$ 在系統的輸出部分上被測量了，而且用測量的結果產生出控制轉矩 $ky$．從圖 4.2 可以看出，閉路控制系統中包含了一個反饋綫路（$F_2(s)$ 所在的綫路）．因此，把整個控制系統稱為反饋伺服系統是很恰當的．

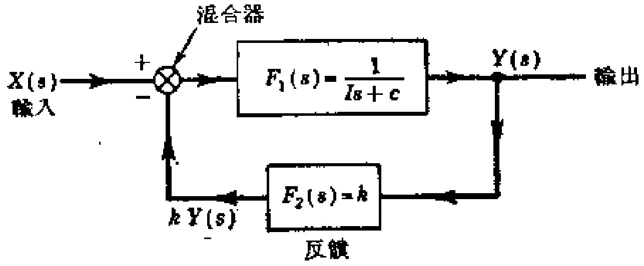


圖 4.2

雖然在上面所分析的這個簡單的例子裏，我們是用把方程(4.1)和方程(4.2)加以比較的方法來說明反饋伺服控制系統的優點，可是，對於更複雜的系統，只用到傳遞函數的概念的分析方法也是很方便的，在以下各節中，我們就來說明這種分析方法．

## 4.2 反饋伺服系統的設計準則

我們來考慮一個一般的反饋伺服系統，這個系統的構造和圖 4.2 所表示的系統相同，但是 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 這兩個傳遞函數是任意的．$F_1(s)$ 稱為前向綫路的傳遞函數，$F_2(s)$

稱爲反饋綫路的傳遞函數. 在一般的情况下,輸出 $Y(s)$ 與輸入 $X(s)$ 之間的關係就是

$$Y(s) = F_1(s)[X(s) - F_2(s)Y(s)].$$

把 $Y(s)$ 從這個方程解出來,就得

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)} = F_s(s), \tag{4.3}$$

這裏, $F_s(s)$ 就是系統的傳遞函數,也就是整個系統的輸出與輸入的比值.

爲了以後討論的便利,把 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 的放大 $K_1$ 和 $K_2$ 也明顯地表示出來,我們把 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 寫作:

$$\left.\begin{aligned} F_1(s) &= K_1G_1(s), \\ F_2(s) &= K_2G_2(s). \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

因爲放大 $K$ 的量綱和傳遞函數 $F(s)$ 的量綱相同,所以,這裏的 $G(s)$ 顯然是無量綱的函數. 因爲 $G(s)$ 的零點和極點也就是 $F(s)$ 的零點和極點,所以,所有關於 $F(s)$ 的"構造"的知識都包含在 $G(s)$ 裏面了. 非常明顯、相當於 $G(s)$ 的放大都是 $1: |G(0)| = 1$. 由於這樣的作法,在以後的討論中我們常常把傳遞函數對系統所起的作用看作是兩個分別的作用的結果:一個是放大 $K$ 的大小所起的作用,另外一個是零點和極點的位置所起的作用,也就是 $G(s)$ 所起的作用. 把作用進行這種劃分的理由,還因爲有以下的事實:如果在一個系統 $F(s)$ 中包含有由放大器和計算器組成的計算部件,那末, $G(s)$ 只與計算器有關,而與放大器無關;系統的放大却是只决定於放大器的. 此外,在系統的設計裏,這兩種不同的控制作用幾乎是完全互不相關的. 因此, $G(s)$ 和 $K$ 可以分別地加以改變,同時也可以給以分別的考慮.

利用方程(4.4),方程(4.3)就可以寫作

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = F_s(s) = \frac{K_1G_1(s)}{1 + K_1G_1(s)K_2G_2(s)} = \frac{1}{[1/K_1G_1(s)] + K_2G_2(s)}. \tag{4.5}$$

假定由方程(3.11)所定義的偏差信號 $e(t)$ 的拉氏變換是 $E(s)$,就有

$$\frac{E(s)}{Y(s)} = \frac{X(s) - Y(s)}{Y(s)} = \frac{1}{F_s(s)} - 1 = \frac{1}{K_1G_1(s)} - [1 - K_2G_2(s)]. \tag{4.6}$$

對於圖 4.3 所表示的那種簡單的反饋伺服系統來說,反饋綫路的傳遞函數 $F_2(s)$ 就是 1,這也就是說,在進行反饋控制作用的時候,僅僅對輸出作了測量,並且直接把測量的結果用作反饋信號,並沒有把測量結果加以任何的改變. 在這種簡單的情况下,方程

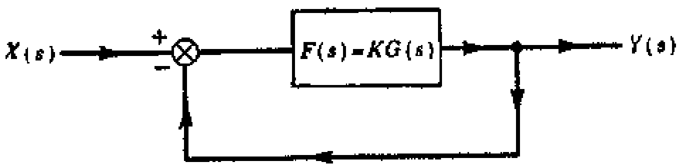



圖 4.3

(4.5)和方程(4.6)就簡化爲

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = F_s(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{1}{[1/KG(s)] + 1} \tag{4.7}$$

和

$$\frac{E(s)}{Y(s)} = \frac{1}{KG(s)}. \tag{4.8}$$

對反饋伺服系統的第一個要求就是穩定性．這也就是說，在輸出運動 $y(t)$ 中，除了正弦式的組成部分之外，其他的成分都應當被阻尼掉．然而，2.4 節的分析表明，系統的穩定性條件用數學的方式來說就相當於：函數 $F_s(s)$ 在 $s$ 平面的右半部（也就是 $s$ 的實數部分是正數的部分）沒有極點．對於一般的反饋伺服系統來說，根據方程(4.5)，$F_s(s)$ 的極點就是

$$\frac{1}{F_s(s)} = \frac{1}{K_1G_1(s)} + K_2G_2(s) \tag{4.9}$$

的零點．對於簡單的反饋伺服系統來說，根據方程(4.7)，$F_s(s)$ 的極點就是

$$\frac{1}{F_s(s)} = \frac{1}{KG(s)} + 1 \tag{4.10}$$

的零點．因此，反饋伺服系統的第一個設計準則就是：

(1) 由方程(4.9)或方程(4.10)所給定的函數 $1/F_s(s)$ 在右半個 $s$ 平面上不應該有零點．

對反饋伺服系統的第二個要求就是：迅速的反應．如果 $s_r$ 是 $F_s(s)$ 的一個極點，2.4 節的分析表明，輸出運動中就包含有 $e^{s_rt}$ 這樣一個成分．所以，系統的反應速度決定於 $s_r$ 的大小．$s_r$ 的數值越大，時間的尺度就越小，所以，反應就越迅速．因此，反饋伺服系統的第二個設計準則就是：

(2) 由方程(4.9)或方程(4.10)所給定的函數 $1/F_s(s)$ 的所有零點都應該具有相當大的數值，而且在 $s$ 平面上所有這些零點都應該在左半平面離開虛軸相當遠的地方[1)]．

如果我們所設計的系統是一個爲了進行位置控制而用的反饋伺服系統（所謂"位置控制"的意思就是希望系統的輸出信號本身總是隨着輸入信號本身的變化而變化．我們常常把這種系統稱爲隨動系統）．在過渡過程結束以後的輸出穩態值就應該和輸入值儘可能地相近，這也就是說，要求偏差的穩態值和輸出的穩態值的比值 $E(0)/Y(0)$ 越小越好．利用方程(4.6)和方程(4.8)，可以把這樣一個要求換成對傳遞函數的放大的要求．這也就是：

(3) 在位置控制的情況下，爲了控制的精確度，對於一般的反饋伺服系統(4.6)就應該要求

$$\frac{1}{K_1} - [1 - K_2] \sim 0, \tag{4.11}$$

對於簡單的反饋伺服系統(4.8)就應該要求

$$K \gg 1. \tag{4.12}$$

以上給出的三個條件 (1)，(2)，(3) 就是反饋伺服系統的設計準則．但是，實際上 (2)，(3) 兩個條件是很難得到十分理想的滿足的，這也就是說系統的穩定性和反應速度之間經常是有矛盾的，所以，爲了實際的工程目的就不能够無限制地提高系統的穩定性和反應速度，在以下各節的討論裏，我們就可以看到一些處理這種矛盾的折衷辦法．

1) 關於這個準則的更嚴格的敍述可以參閱[23]．

### 4.3 乃氏(Nyquist)法

既然，正如前面所提到過的那樣，普通的傳遞函數都是兩個 $s$ 的多項式的比值，所以上一節中的第(1)準則也就相當於要求某一個多項式的零點全都在 $s$ 的左半平面． 這是一個古典的問題． 路斯(E. J. Routh)利用了所謂的"路斯不等式"解決了這個問題，路斯不等式裏所包含的只是被考慮的多項式的系數[1]． 但是控制工程師並不喜歡用這個方法，因爲當多項式的系數有變化的時候，路斯不等式的變化情況是很難捉摸的．由於傳遞函數是比較原始比較直接的資料，而且它也能被工程師所"物理地"了解，所以工程師們寧願採用一種直接從方程(4.9)或(4.10)的傳遞函數下手的分析方法，而不願意把傳遞函數再加以變化。

乃奎斯特(H. Nyquist)發明了一個這樣的方法． 我們把這個方法稱爲乃氏法． 乃氏法的數學基礎是一個關於解析函數 $f(s)$ 的定理，這裏的 $s$ 是一個複變數．這個定理是柯西(Cauchy)所發現的[2]：

如果 $f(s)$ 在一條閉路綫 $C$ 的內部有 $n$ 個單零點和 $m$ 個單極點（每一個 $k$ 重零點或 $k$ 重極點就分別算作 $k$ 個單零點或 $k$ 個單極點）的話，那末，當 $s$ 以順時針方向沿着 $C$ 轉動一圈的時候，向量 $f(s)$ 也就以順時針方向圍繞原點轉動 $n-m$ 圈．

爲了把這個很强有力的定理應用到我們的問題上去，我們所選取的路綫 $C$ 就包含了整個的右半平面． 因爲實數部分是正數的零點只能在這一個區域裏． 圖 4.4 所表示的就是這樣一條路綫，這條路綫包括了虛軸和一個在虛軸右邊的半徑是 $R \to \infty$ 的半圓．首先，我們來研究比較簡單的情形，也就是簡單的反饋伺服系統的情形．由方程(4.10)我們可以看到，$1/F_s(s)$ 的極點就是 $G(s)$ 的零點． 如果 $G(s)$ 在 $s$ 平面的右半部的零點的個數是 $m$，那末，$1/F_s(s)$ 在 $C$ 的內部就有 $m$ 個極點．因此，如果希望 $1/F_s(s)$ 在 $s$ 平面的右半部沒有零點，那末，當 $s$ 沿着圖 4.4 裏的 $C$ $(R \to \infty)$ 走一圈的時候，就必須要求 $1/F_s(s)$ 圍繞原點以反時針方向轉 $m$ 圈． 但是，根據方程(4.10)很容易看出來，這也就相當於要求 $1/KG(s)$ 以反時針方向圍繞 $-1$ 點轉 $m$ 圈．然而，又因爲 $K$ 是一個常數，所以上面這個判據也相當於要求 $1/G(s)$ 以反時針方向圍繞 $-K$ 點繞 $m$ 圈． 不言而喻，當 $G(s)$ 在 $s$ 平面右半部沒有零點，或者 $m=0$，那末，乃氏穩定準則要求向量 $1/G(s)$ 不圍繞 $-K$ 點轉動．

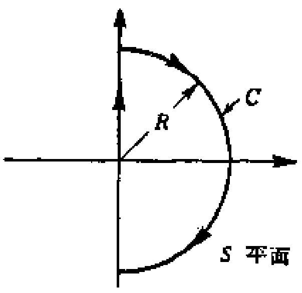



圖 4.4

現在，讓我們用下列的簡單的傳遞函數來說明這個方法的應用：

$$G(s) = \frac{1}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)},$$

也就是

$$1/G(s) = s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s). \tag{4.13}$$

---

1) 路斯不等式常常被稱爲路斯-胡爾維茨(Hurwitz)不等式． 這個穩定性的判定方法的詳細情況在關於運動穩定性的教科書以及一般的調節理論教科書中都可以找到． 這個方法的證明可以參閱[3, 24, 25]．

2) 關於這個定理的證明，可參閱 Whittaker and Watson, "Modern Analysis" (Cambridge-Macmillan, 1943)的第 6.31 節，第 119 頁；或其他的關於複變數函數論的教科書．

首先來考慮圖 4.4 的路綫 $C$ 的沿虛軸的部分，在這一部分上

$$\frac{1}{G(s)} = \frac{1}{G(i\omega)} = i\omega(1 + i\tau_1\omega)(1 + i\tau_2\omega).$$

在 $\omega = 0$ 點，$1/G(i\omega) = i0$． 當 $\omega \to +\infty$，$1/G(i\omega) \to -i\infty$．因此，在 $\omega$ 從 0 增加到 $+\infty$ 的過程中，向量 $1/G(i\omega)$ 的大小也隨之增加，並且相角從 $\pi/2$ 增加到 $3\pi/2$．根據方程(3.17)，相當於負 $\omega$ 值($-\infty < \omega < 0$) 的 $1/G(i\omega)$ 的端點所描畫出的曲綫也就是相當於正 $\omega$ 值的 $1/G(i\omega)$ 曲綫對於實軸所作的"反射"． 所以，當 $s$ 在虛軸上從 $-i\infty$ 走到 $+i\infty$ 的時候，$1/G(i\omega)$ 在圖 4.5 上就描畫出曲綫 $abOc$．

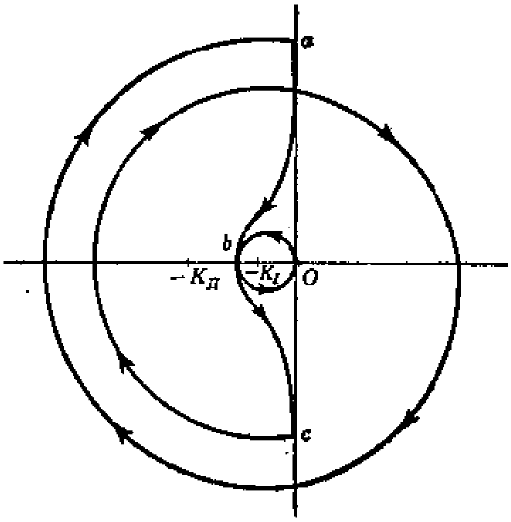


圖 4.5

當 $s$ 走過圖 4.4 上所表示的半圓的時候，$1/G(s) \sim s^3$． 所以，當 $s$ 從 $+i\infty$ 沿着半圓以順時針方向轉到 $-i\infty$ 時，$1/G(s)$ 也是順時針轉動的，不過 $1/G(s)$ 所轉過的角度 3 倍於 $s$ 所轉過的角度． 在圖 4.5 裏，這一部分曲綫是以從 $c$ 到 $a$ 的那一部分所表示的．根據這個圖形來看，如果 $K = K_I$ 像圖形所畫出的那樣，那末，向量 $1/G(s)$ 圍繞 $-K_I$ 點轉動的總圈數等於零（因為順時針方向旋轉的一圈半 $ca$ 和反時針方向旋轉的一圈半 $abOc$ 恰恰互相抵消了）． 既然方程(4.13)所給的這個函數 $G(s)$ 根本沒有零點，而 $1/G(s)$ 對 $-K_I$ 的轉動圈數也是 0． 所以反饋伺服系統是穩定的．如果，像圖 4.5 所表示的那樣，$K = K_{II}$，那末，向量 $1/G(s)$ 圍繞 $-K_{II}$ 點就轉動了兩圈（曲綫的 $abOc$ 部分對 $-K_{II}$ 點在順時針方向轉了半圈，$ca$ 部分以順時針方向轉了一圈半），由於轉動圈數 2 不等於 $G(s)$ 在右半平面的零點個數 0，所以，$F_s(s)$ 在右半平面有兩個極點，因而反饋伺服系統是不穩定的． 從以上的討論可以看出，如果放大 $K$ 的值相當大就會使這個系統不穩定． 系統的穩定放大值與不穩定放大值的分界點是 $b$． 使系統穩定的放大值 $K$ 必須在原點和這個點之間：$b < -K < 0$．

對於一般的反饋伺服系統來說，關於穩定性的問題也就是方程(4.9)所表示的函數 $1/F_s(s)$ 在 $s$ 平面的右半部有沒有零點的問題．對這個函數直接應用柯西定理是很不方便的，因為如果這樣作的話，我們就必須把向量 $1/K_1G_1(s)$ 和向量 $K_2G_2(s)$ 相加起來才行．現在，我們假設 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 在右半平面的零點的個數分別是 $m_1$ 和 $m_2$，$G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 在右半平面的極點的個數分別是 $n_1$ 和 $n_2$． 並且假定所有這些零點和極點都互不相等，那末，$1/F_s(s)$ 在右半平面的極點的個數顯然就是 $m_1+n_2$． 現在，我們把 $1/F_s(s)$ 用 $K_2G_2(s)$ 除一下．這個演算就使表示式 $1/F_s(s)$ 增加了 $m_2$ 個極點和 $n_2$ 個零點，但是，還有這樣一種可能性：在作除法的時候，因為有些 $1/F_s(s)$ 的極點或零點和 $G_2(s)$ 的一些極點或零點是相同的，所以這些零點和極點就互相抵消掉了． 假設這樣抵消掉的零點或

極點的個數是 $\alpha$，那末 $1/F_s(s)K_2(s)$ 在右半平面的極點的個數就是 $m_1+n_2+m_2-\alpha$. 現在就有

$$\frac{1}{F_s(s)K_2G_2(s)}=\frac{1}{K_1K_2G_1(s)G_2(s)}+1 \tag{4.14}$$

根據方程(4.14)，$1/F_sK_2G_2(s)$在右半平面的極點的個數和$1/K_1K_2G_1(s)G_2(s)$在右半平面的極點的個數是相等的，所以也就等於 $m_1+m_2$. 既然 $m_1+n_2+m_2-\alpha=m_1+m_2$，所以 $n_2-\alpha=0$. 我們假設反饋系統是穩定的，因此，$1/F_s(s)$ 在右半平面沒有零點，因而 $1/F_s(s)K_2G_2(s)$ 在右半平面的零點的個數就是 $n_2-\alpha$，也就是 0. 所以 $1/F_s(s)K_2G_2(s)$ 在右半平面也沒有零點. 爲了清楚起見，我們把各個函數在右半平面的零點和極點的個數列在下列的表 4.1 中. 因此，當 $s$ 走過圖 4.4 所表示的那條曲綫 $C$ 的時候，向量

表 4.1

| 函 數 | 在右半平面的零點個數 | 在右半平面的極點個數 |
|---|---|---|
| $G_1(s)$ | $m_1$ | $n_1$ |
| $G_2(s)$ | $m_2$ | $n_2$ |
| $1/F_s(s)$ | 0 | $m_1+n_1$ |
| $1/F_s(s)K_2G_2(s)$ | $n_2-\alpha$ | $m_1+n_2+m_2-\alpha=m_1+m_2$ |

$1/F_s(s)K_2G_2(s)$ 就應該圍繞原點以順時針方向轉動 $-(m_1+m_2)$ 圈. 根據方程(4.14)，這個穩定條件也就相當於要求向量 $1/K_1K_2G_1(s)G_2(s)$ 圍繞 $-1$ 點以反時針方向轉動 $m_1+m_2$ 圈，或者要求向量 $1/G_1(s)G_2(s)$ 圍繞 $(-K_1K_2)$ 點以反時針方向轉動 $m_1+m_2$ 圈. 這就是一般的反饋伺服系統的穩定性的乃氏法.

正如圖 4.5 所表示的那個例子一樣，乃氏法中所用的曲綫的最重要的一部分就是相當於 $s=i\omega$ 的那一部分. 因此，我們可以用前向綫路和反饋綫路的頻率特性來直接解決系統的穩定性的問題. 既然，系統的部件的頻率特性的數據常常可以用實驗方法確定，所以這種可以直接利用實驗資料的方法是很有利的. 這是乃氏法的優點. 乃氏法的缺點在於它不能够確定穩定的程度，也就是說它不能回答這樣一個問題：如果系統是穩定的，那末，它的阻尼到底有多麽大呢？爲了解答這個問題，我們可以把已有的準則改變成這樣：要求 $1/F_s(s)$ 在一條位於左半平面而平行於虛軸的直綫的右方沒有零點. 這條直綫和虛軸的距離 $-\lambda$ 就表示最低限度的阻尼. 所以只要把路綫 $C$ 適當地改換一下（沿着路綫的 $s$ 以及 $C$ 內所包含的零點個數當然也隨之改變了）乃氏準則仍然是可用的，但是這樣作的時候，我們必須知道的是傳遞函數在直綫 $s=-\lambda+i\omega$ 上的值，而不是在 $s=i\omega$ 上的值了. 所以，關於頻率特性的資料就不再能直接應用了，這樣一來，乃氏法就失去了它的主要優點. 但是，對於這個問題，艾文思(W. R. Evans)[1]發明了一個不同的處理方法，這個方法比乃氏法要好得多了. 在下一節裏，我們就來討論這個方法.

### 4.4 艾文思(Evans)法

我們先來考慮簡單的反饋伺服系統的情形. 這時，基本的問題就是求出下列方程的

1) W. R. Evans, *Trans. AIEE*, 67, 547—551 (1948).

根

$$0 = \frac{1}{F_s(s)} = 1 + \frac{1}{KG(s)}. \tag{4.15}$$

其中的 $G(s)$ 是已知的函數．艾文思法的基本作法就是把這些根確定為放大 $K$ 的函數，所以這個方法也稱為根軌跡法．如果我們用艾文思法處理問題，那末，相應於對根所提出的任何要求，我們都可以找到合乎要求的放大 $K$ 的數值．因此，用這個方法所能作到的事情比僅只滿足 4.2 節中第(1)準則要多得多，並且對於 4.2 節中所提出的反饋伺服系統的所有三個設計準則來說，都可以用艾文思法把設計問題加以真正的解決．

必須假設 $G(s)$ 是由它的零點 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 和它的極點 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 所給定的．根據由方程(3.16)，(3.21)與(3.23)所給的放大的定義，

$$G(s) = A\frac{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_m)}{(s-q_1)(s-q_2)\cdots(s-q_n)}, \tag{4.16}$$

其中

$$A = \frac{(-q_1)(-q_2)\cdots(-q_n)}{(-p_1)(-p_2)\cdots(-p_m)}.$$

對於實際的物理系統來說，$G(s)$ 的分子多項式和分母多項式的系數都是實數．所以，這些 $p$ 或者是實數或者是成對出現的共軛複數，類似的，這些 $q$ 或者是實數或者是成對出現的共軛複數．因此，$A$ 必然是實數．不但如此，在安排普通的工程系統的時候，我們還經常使 $A$ 是一個正數．因此，在以下的討論裏，我們就把 $A$ 看作是一個正實數．在普通情況下 $G(s)$ 的分母多項式的次數總是大於或者等於分子多項式的次數，也就是 $n \geq m$．現在，我們把方程(4.16)裏的每一個因子都寫成向量形式：

$$\left.\begin{aligned} s-p_1 &= P_1e^{i\varphi_1}, \\ s-p_2 &= P_2e^{i\varphi_2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s-p_m &= P_me^{i\varphi_m}, \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

$$\left.\begin{aligned} s-q_1 &= Q_1e^{i\theta_1}, \\ s-q_2 &= Q_2e^{i\theta_2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s-q_n &= Q_ne^{i\theta_n}. \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

$P_re^{i\varphi_r}$ 就是從 $p_r$ 點到 $s$ 點的向量．$Q_re^{i\theta_r}$ 就是從 $q_r$ 點到 $s$ 點的向量．$s$ 是複 $s$ 平面上的代表變數的點．利用方程(4.17)和(4.18)，$G(s)$ 就可以寫作

$$G(s) = A\frac{(P_1e^{i\varphi_1})(P_2e^{i\varphi_2})\cdots(P_me^{i\varphi_m})}{(Q_1e^{i\theta_1})(Q_2e^{i\theta_2})\cdots(Q_ne^{i\theta_n})}. \tag{4.19}$$

既然 $A$ 是正實數，我們又可以把方程(4.19)寫作

$$G(s) = Re^{i\theta}, \tag{4.20}$$

在這個表示式裏

$$R = A\frac{(P_1P_2\cdots P_m)}{(Q_1Q_2\cdots Q_n)}, \tag{4.21}$$

而

$$\theta = (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n). \tag{4.22}$$

因爲這些 $P$ 和 $Q$ 都是方程(4.17)和方程(4.18)所規定的向量的長度，所以，它們都是正數．因此，$R$ 是正數．這樣一來，求傳遞函數的倒數的根的基本方程(4.15)就變爲

$$\frac{e^{i\theta}}{KR} = -1.$$

不難看出，如果希望滿足這個方程，就必須有

$$KR = 1, \tag{4.23}$$

和

$$\theta = \pm\pi. \tag{4.24}$$

艾文思法包含兩個步驟：首先，要找出所有滿足適當的角度條件(4.24)的 $s$ 來，這樣我們得出所謂根軌跡的曲綫．然後，對於根軌跡上的每一點我們都可以算出相當的 $R$ 值，再用方程(4.23)我們就得出相當的 $K$ 值．關於描畫根軌跡的方法，艾文思提出了一些有用的法則．現在我們把這些法則說明一下：

法則 1．如果 $K = 0$，根據方程(4.15)必然有 $G(s) \to \infty$．所以，在 $K = 0$ 時 $1/F_s(s)$ 的根都是 $G(s)$ 的極點，或者說，根軌跡都是從 $G(s)$ 的極點開始的．在 $s$ 平面上用小圓點表示 $G(s)$ 的極點．

法則 2．如果 $K \to \infty$，就必然有 $G(s) \to 0$．所以，根軌跡上相當於 $K \to \infty$ 的點，可能是 $G(s)$ 的零點．在 $s$ 平面上我們用小圓圈表示 $G(s)$ 的零點．但是，如果 $n > m$，$G(s)$ 的零點的個數比 $1/F_s(s)$ 的零點的個數少．但是，在這種情形中，當 $s \to \infty$ 時，$G(s) \to 0$，所以，$s = \infty$ 就補充了那些缺少的根．此外，對於非常大的 $s$，

$$G(s) \sim \frac{A}{s^{n-m}}.$$

因此，方程(4.15)可以近似地表示爲

$$s^{n-m} \approx -KA.$$

所以，根軌跡的漸近綫的相角就是

$$\frac{\pi}{n-m} + \frac{2k\pi}{n-m} \quad k = 1, 2, 3, \cdots. \tag{4.25}$$

法則 3．在實軸上的根軌跡是實軸上的一些交替的綫段，這些綫段的端點都是 $G(s)$ 的實零點或 $G(s)$ 的實極點，而且這些交替的綫段從所有這些零點與極點中最右邊的那一個點(可能是零點，也可能是極點)開始．

這個法則是很容易驗證的．我們在實軸上隨便取一個點 $s$．從一對複共軛的零點到這個點的向量的角度就是 $+\varphi$ 與 $-\varphi$，從一對複共軛極點到這個點的向量的角度就是 $+\theta$ 與 $-\theta$(因爲複共軛點對於實軸是對稱的)．所以，相當於複共軛零點或複共軛極點的角度的總和等於零．如果實軸上的一個極點或是一個零點在 $s$ 點的左面，那麼，從這個極點或零點到 $s$ 點的向量的角度就是 0．如果這個點在 $s$ 點的右面，那末，從這個點到 $s$ 點的向量的角度就是 $\pi$．因此，如果在 $s$ 右面的零點與極點的總數是一個奇數，那末，角度的

總和就是 $\pi$（因為 $2\pi$ 的整倍數對問題毫無影響）。

法則 4. 如果發生根軌跡從實軸上離開的情況，我們可以用這樣一個條件來估計根軌跡在實軸上的離開點的位置：如果根軌跡上的一點離開實軸的距離是一個非常小的數 $\Delta\omega$，那末，由於在右面的 $G(s)$ 的零點與極點所引起的角度增加一定恰好被在左面的零點與極點所引起的角度減少所抵消。

例： 考慮下列的傳遞函數，

$$G(s) = \frac{(0.001)(2)(6)}{(s+0.001)(s+2)(s+6)}. \tag{4.26}$$

當 $K=0$ 時，根軌跡從實軸上的 $-0.001$，$-2$ 和 $-6$ 出發。在實軸上的根軌跡就是 $-0.001$ 與 $-2$ 之間的綫段以及 $-6$ 與 $-\infty$ 之間的綫段。在這個情形裏，$m=0, n=3$。所以，按照方程(4.25)漸近綫的相角就是 $+\pi/3$，$-\pi/3$，$\pi$。假設根軌跡在實軸上的 $\lambda_1$ 點（$\lambda_1$ 點當然要在 $-0.001$ 與 $-2$ 之間）處離開實軸。應用法則 4 就有

$$\frac{\Delta\omega}{\lambda_1+0.001} + \frac{\Delta\omega}{\lambda_1+2} + \frac{\Delta\omega}{\lambda_1+6} = 0$$

或者

$$(\lambda_1+2)(\lambda_1+6) + (\lambda_1+0.001)(\lambda_1+6) + (\lambda_1+0.001)(\lambda_1+2) = 0.$$

因而

$$3\lambda_1^2 + 16.002\lambda_1 + 12.008 = 0.$$

所以

$$\lambda_1 = -\frac{16.002}{6} - \sqrt{\left(\frac{16.002}{6}\right)^2 - \frac{12.008}{3}} = -0.904.$$

法則 5. 常常可以利用直角的某些性質來估計根軌跡從左半平面過渡到右半平面時與虛軸的交點。

例 讓我們還是來考慮由方程(4.26)所表示的傳遞函數。除了原點 $s=0$ 之外，這個傳遞函數可以非常近似地用下列關係式表示：

$$G(s) \approx \frac{(0.001)(2)(6)}{s(s+2)(s+6)}.$$

正如圖 4.6 所表示的那樣，$\theta_1 \approx \pi/2$，因此，方程(4.24)就給出

$$\theta = -\pi \approx -\theta_2 - \theta_3 - \frac{\pi}{2},$$

或者

$$\theta_2 + \theta_3 \approx \frac{\pi}{2}.$$

但是，從圖上可以看到有下列關係：

$$\frac{\pi}{4} = \theta_3 + \beta, \quad \frac{\pi}{4} + \alpha = \theta_2,$$

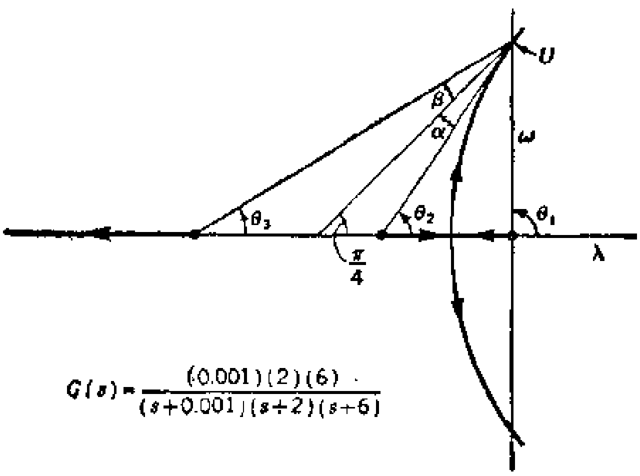



圖 4.6

因此

$$\alpha \approx \beta.$$

這就是確定過渡點 $U$ 的幾何條件.

法則 6. 根軌跡離開一個極點(或趨近於一個零點)時的方向也可以計算出來, 只要把平面上所有的零點與極點到這個被考慮的極點(或零點)的角度加以計算就可以了.

例 圖 4.7 所表示的是相應於某一個傳遞函數 $G(s)$ 的根軌跡, $G(s)$ 在實軸上有兩個極點和兩個零點, 同時, 還有一對複共軛的極點. 在根軌跡上取與極點 $q_4$ 非常接近的一點 $s$. $q_4$ 到 $s$ 的向量的相角 $\theta_4$ 就是根軌跡離開 $q_4$ 時的方向. 從各個極點和各個零點到 $s$ 點的向量的角度仍然可以看作是 $\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2$ 和 $\theta_3$. 所以, 根據方程(4.24). $\theta_4$ 就由下列方程所確定,

$$(\varphi_1 + \varphi_2) - [(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + \theta_4] = \pi.$$

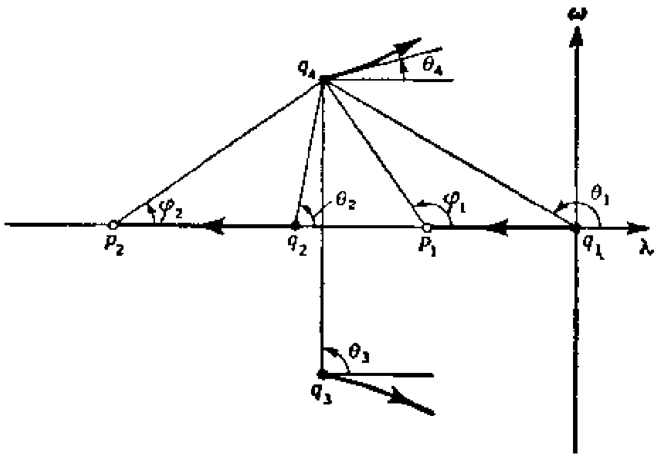



圖 4.7

從這個方程就能算出 $\theta_4$.

根據以上所講的六條法則就能得出根軌跡的主要的特性. 對於中間的情形 ($K$ 既不等於零, 也不趨近於 $\infty$ 的情形), 我們可以先在平面上適當地選取一些點, 然後用試算的方法對這些點加以檢驗, 根據檢查的結果把屬於根軌跡的點保留下來. 這樣就可以逐步地把根軌跡完全描繪出來. 沿着根軌跡曲綫, 我們可以算出相應於每一點的放大 $K$ 的值. 如果已經把符合設計要求的 $1/F_s(s)$ 的零點位置選擇好了, 那麼相當的 $K$ 值也就可以完全確定. 這樣一來, 反饋系統的設計問題就得到了解決. (一般說來, 實際的設計過程當然要比所講的要複雜得多[5, 9, 27]).

### 4.5 根軌跡的流體力學比擬

把方程(4.15)和方程(4.16)合併起來, 我們就得出

$$\frac{(s-q_1)(s-q_2)\cdots(s-q_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_m)} = -KA.$$

如果, 先取這個方程的對數, 然後再用 $2\pi$ 除一下, 我們就有

$$W(s) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\log(s-q_i) - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\log(s-p_j) = \frac{1}{2\pi}\log KA + i\left(\frac{1}{2}\right). \quad (4.27)$$

方程(4.27)這樣一個數學表示式可以有很多種不同的物理解釋. 一個很明顯的物理解釋就是把 $W(s)$ 看作是完全不可壓縮的流體的一個二維無旋運動的複勢函數[1]. 如果

1) 可以參閱 V. L. Streeter, "Fluid Dynamics," McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1948. 也可以參閱[28, 29].

$\phi(\lambda, \omega)$ 是勢函數，$\psi(\lambda, \omega)$ 是流函數，那末就有

$$W(s) = \phi(\lambda, \omega) + i\psi(\lambda, \omega), \tag{4.28}$$

其中 $s = \lambda + i\omega$. 因此，表示 $1/F_s(s)$ 的根軌跡的方程(4.27)可以這樣解釋：根軌跡就是流函數取常數值 $\frac{1}{2}$ 的那些曲綫；所以，用流體力學的術語來說，根軌跡就是由 $\frac{1}{2}$ 流綫的各個分枝所組成的. 沿着這條流綫勢函數的值是逐點改變的，它等於

$$\frac{1}{2\pi} \log KA.$$

方程(4.27)還表示這樣一個事實：這個流動是由 $n$ 個單位强度的源點 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 和 $m$ 個單位强度的匯點 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 所構成的. 在我們的圖形表示法裏是用小圓點表示源點，用小圓圈表示匯點. 有了這樣一個解釋，我們就可以"理解"圖 4.6 和圖 4.7 中根軌跡的圖形.

流體力學比擬還有另外一個很大的用處：它能够提示我們怎樣把系統加以改變，使系統具有更好的性能. 舉例來說，假設有一個系統是由下列傳遞函數所代表的，

$$G(s) = \frac{q_1 q_2}{s(s - q_1)(s - q_2)} \quad |q_1| < |q_2|,$$

如果放大 $K$ 的值太小，那末，在閉路控制的情形下，這個系統就可能是不穩定的，因而也就不能够滿足第 4.2 節的第(3)準則. 根軌跡的形狀和圖 4.6 中的根軌跡是相像的. 這時，流體力學比擬立刻就提示我們這樣作：只要在 $q_1$ 附近增加一個匯點 $p_c$，並且在 $q_2$ 附近增加一個源點 $q_c$，就可以把 $U$ 點附近的流綫向左方推過一些距離，因而也就把過渡點 $U$ 的位置加高一些. 因此，修改後的傳遞函數就是

$$G(s) = \frac{q_c}{p_c}\frac{(s - p_c)}{(s - q_c)} \frac{q_1 q_2}{s(s - q_1)(s - q_2)}.$$

圖 4.8 所表示的就是相當的根軌跡. 因爲 $|p_c| < |q_c|$，所以與原來的傳遞函數串聯的附加傳遞函數 $\frac{q_c}{p_c}\frac{(s - p_c)}{(s - q_c)}$ 一定是相角超前的，這個函數與 3.3 節中方程(3.27)所表示的相角超前電路的傳遞函數是同一類型的.

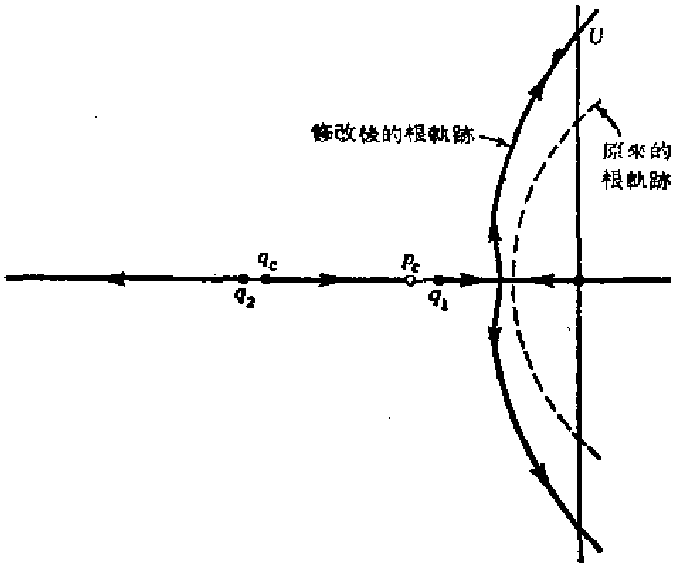


圖 4.8

流體力學比擬還可以使我們了解用反饋綫路使一個反應緩慢的機構增大反應速度的可能性. 根據 4.2 節中的第(2)準則，如果希望反應迅速就必須要求根的數值相當大. 現在，爲了簡單起見，假定我們有一個一階的綫性機械系統，這個系統的特性是用負實軸上的一個數值很小的 $q_1$ 點來表示的. 如果我

們把這個系統與一個特性爲相當大的負實數 $q_2$ 表示的反應很快的電路串接起來，這個系統的反應速度並不能够改進，因爲，我們仍然還有一個數值很小的根 $q_1$。但是，如果我們再把反饋綫路連接起來，從流綫的形狀，或者說是根軌跡，可以看出，當放大 $K$ 的值從 $K=0$ 開始增加時，根也就從 $q_1$ 點開始向左方（也就是走向 $q_2$ 的方向）移動。因此，對於一個適當地選取的放大 $K$ 的值，我們就可以使得根的數值比 $q_1$ 大一些，因而也就可以使系統的反應速度更加快一些。

以上講過的一些描畫根軌跡的辦法，對於一般的反饋伺服系統也還可以應用。這時的問題就是要描畫方程(4.19)所給的 $1/F_s(s)$ 的根軌跡，所以，表示根軌跡的條件就是

$$\frac{1}{K_1G_1(s)} = -K_2G_2(s).$$

因爲 $1/F_s(s)$ 的根和 $G_2(s)$ 的零點不會相同，所以我們可以用 $G_2(s)/K_1$ 把上面的方程除一下，因此就有

$$\frac{1}{G_1(s)G_2(s)} = -K_1K_2. \tag{4.29}$$

所以，如果我們設

$$\left.\begin{aligned} G(s) &= G_1(s)G_2(s), \\ K &= K_1K_2, \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

然後，再把方程(4.29)和方程(4.15)比較一下，就可以看到，求一般的反饋伺服系統的根軌跡的問題就化爲前面討論過的求簡單的反饋伺服系統的根軌跡的問題了。在4.3節裏我們曾經比較謹慎地分析了把乃氏法應用到一般的反饋伺服系統上去的問題，事實上，對於那個問題上也可以用現在的由方程(4.30)所表示的簡化方法進行分析。因此，如果只就4.2節的(1)，(2)，(3)這三個準則來考慮系統的定性的運轉性能的話，簡單的反饋伺服系統和一般的反饋伺服系統並沒有什麼區別，只不過不要忘記(4.30)這一個關係就是了。只有在需要對系統的運轉性能進行定量的研究時，我們才必須對方程(4.3)和方程(4.7)所表示的這兩個系統傳遞函數的區別給予應有的注意。

### 4.6 伯德(Bode)法

根軌跡在 $U$ 點從左半 $s$ 平面過渡到右半 $s$ 平面，既然 $U$ 點在虛軸上，所以它當然就代表一個純虛數根 $i\omega^*$。換句話說，方程(4.15)被 $s=i\omega^*$ 所滿足，也就是

$$KG(i\omega^*) = F(i\omega^*) = -1 = 1\cdot e^{-i\pi}.$$

因此，當頻率特性 $F(i\omega)$ 的振幅 $M$ 等於1，同時相角 $\theta$ 等於 $-\pi$ 時，就發生了從穩定過渡到不穩定的臨界情況。這個臨界條件也可以由乃氏穩定準則推導出來，因爲在 $1/F(i\omega)$ 圖上的 $-1$ 點就是臨界點。其實，只要研究一個典型的例子（例如圖4.5）就可以看出來，在穩定的情形裏，$1/F(i\omega)$ 曲綫總是把 $-1$ 點包圍在內的。因爲，在一般情况下 $1/F(i\omega)$ 的振幅總是隨着 $\omega$ 的增加而增加的，所以如果希望 $1/F(i\omega)$ 曲綫把 $-1$ 點包圍在內，只要要求當 $1/F(i\omega)$ 的相角 $\theta$ 等於 $+\pi$ 的時候，振幅 $M$ 比1大就可以了，或者也可以這樣說：當 $\theta$ 等於 $-\pi$ 時，$M$ 必須小於1；或者，當 $M=1$ 的時候，$\theta$ 應該比 $-\pi$ 還要大。這個穩定條件就是伯德法的根據。我們把頻率特性的振幅等於1時的頻率稱爲**放大分界點**。

這時的相角 $\theta$ 與 $-\pi$ 的差數稱爲相補角. 伯德穩定準則的敍述是這樣的:在放大分界點處相補角應該在 30° 到 50° 之間. 在一個伯德圖裏, $\log_{10} M = 0$ 處的頻率就是放大分界點. 所以也就不難檢驗伯德穩定準則是否滿足了.

採用伯德法的時候,可以直接利用關於頻率特性的資料,在這一點上伯德法與乃氏法是相似的. 伯德法的優點是簡單易行,但是它與艾文思的根軌跡法比較起來也還有一個很大的缺點,因爲根據伯德法是不能知道穩定的程度的. 爲了補救這個缺點,奧斯本(R. M. Osborn)[1]給了一個半經驗的公式,利用這個公式就可以計算相當於最危險的根(也就是離虛軸最近的根)的阻尼系數 $\zeta$. 他的公式是

$$\zeta \approx \frac{1}{60}\frac{\alpha}{m}, \tag{4.31}$$

其中 $\alpha$ 是在放大分界點處的相補角的數值,度量單位是"度"("°"), $m$ 是在放大分界點處 $\log_{10} M$ 曲綫對於 $\omega$ 而言的斜率. 量度 $\zeta$ 時所用的時間單位和量度 $\omega$ 時所用的時間單位是相同的. 譬如說,如果 $\alpha = 30°$ 而 $m = 1.7$ 那末 $\zeta \approx 1/(2 \times 1.7) = 0.3$.

## 4.7 傳遞函數的設計

以前各節裏所討論的確定系統的穩定性的各種方法主要是分析的方法(也就是對已有的系統或者已經設計好的系統加以分析的方法),其中也有一部分牽涉到綜合的方法(也就是設計傳遞函數的方法),但是,關於綜合方法所能作到的僅僅是怎樣確定放大 $K$ 的可能範圍的問題. 當然,這兩種方法都能够提示我們如何變更傳遞函數的構造以改進系統的性能. 根軌跡法在這一方面的作用是特別明顯的. 至於如何通過變更系統的實際部件的方法來改進系統的傳遞函數,使傳遞函數發生合乎要求的改變,這主要是伺服控制工程中的實際技術問題.

不像分析方法那樣有一定的處理方法,綜合方法還沒有一個普遍適用的方法. 綜合方法的問題只在一種問題上已經有了完全的解決,這種問題就是:如何設計一個包含有電阻和電容的電路($RC$ 電路),使得這個電路系統的傳遞函數具有事先指定的零點和極點. 因爲這種補償電路有着很大的可變性,而且常常被用來"補償"(也就是改進)系統中的其他部件的傳遞函數的特性,並且還因爲我們確實也常常可以用增加一些零點和極點的方法使系統的傳遞函數得到合乎需要的改進,所以,這個問題的完全解決是十分重要的. 基爾曼(E. A. Guillemin)[2]和外因貝爾克(L. Weinberg)[3][4]對於這個問題都有重要的貢獻. 在這裏,我們並不討論這個問題,我們要强調指出只是:我們經常可能組成一個具有很複雜的規定性質的電阻電容電路.

## 4.8 多迴路伺服系統

到目前爲止,我們所討論過的伺服系統都是單迴路的(也就是說,伺服系統的方塊圖

1) R. M. Osborn, 1949 年 8 月在舊金山(San Francisco)舉行的美國無綫電工程師學會(IRE)的夏季年會上發表的論文.

2) E. A. Guillemin, *J. Math. and Phys.*, **28**, 22—44 (1949).

3) L. Weinberg, *J. Appl. Phys.*, **24**, 207—216 (1953).

4) 如果想知道這方面比較詳細的情況,可以參閱[25].

裏只有一個閉合的路綫)。 但是,在實際的工程問題中往往需要更複雜的系統;例如,圖4.9 所表示的方塊圖就是一個典型的控制系統,這個系統是用來控制飛機對於一個軸的轉

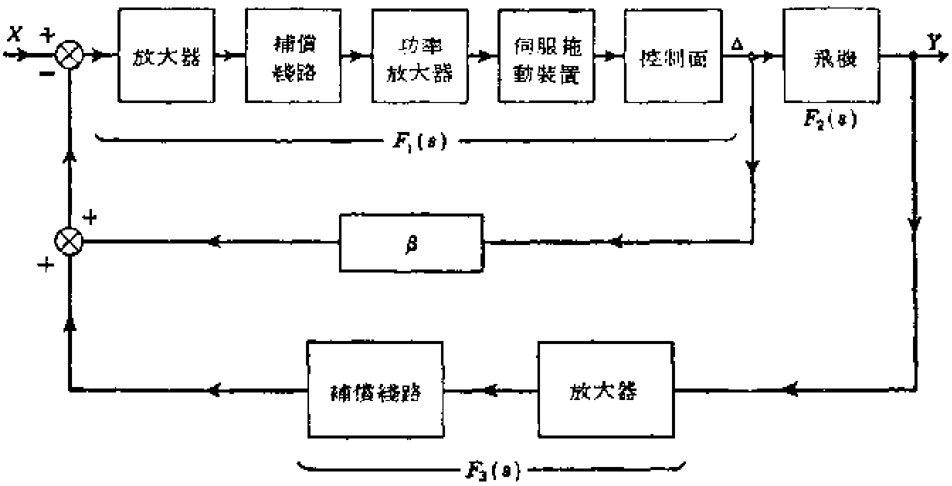



圖 4.9

動的[1]。圖中的內迴路(也就是 $\beta$ 所在的迴路)稱為控制面位置的反饋(所謂"控制面"就是飛機表面的起控制作用的可動部分,例如舵,副翼等部分),或者稱為硬式反饋。如果沒有把內迴路閉合起來,我們就得到普通的反饋控制系統,而且

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{F_1(s)F_2(s)}{1+F_1(s)F_2(s)F_3(s)}. \tag{4.32}$$

如果把內迴路和外迴路($F_3(s)$ 所在的迴路)都閉合起來,就有

$$\Delta(s) = F_1(s)[X(s) - \beta\Delta(s) - F_3(s)Y(s)]$$

(這裏的 $\Delta(s)$ 表示控制面的運動),以及

$$Y(s) = F_2(s)\Delta(s).$$

因此,就得到

$$\frac{\Delta(s)}{X(s)} = \frac{F_1(s)}{1+\beta F_1(s)+F_1(s)F_2(s)F_3(s)} \tag{4.33}$$

和

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{F_1(s)F_2(s)}{1+\beta F_1(s)+F_1(s)F_2(s)F_3(s)}. \tag{4.34}$$

這個控制系統的穩定性與反應速度是由函數 $1+\beta F_1(s)+F_1(s)F_2(s)F_3(s)$ 所決定的。因為在這個系統中,補償電路,放大器以及內迴路的放大 $\beta$ 都是很容易改變的,所以我們也就不難設計出一個特性相當理想的傳遞函數來,而且並不需要改變飛機的結構設計以及它的機械裝置。

在設計一個良好的控制系統時,常常遇到這樣一個困難:如何使系統不但能進行很準確的控制(也就是要求放大 $K$ 的値相當大),而且還有相當快的反應速度和合適的阻尼性質。 這個問題就使人產生了把開路控制方法與閉路控制方法結合起來的想法,這個想法

1) L. Becker, *Aeronaut. Eng. Rev.*, September, 1951. p. 17.

是莫爾(J. R. Moore)最先提出來的[1]. 我們來考慮圖 4.10 所表示的系統, 在這個系統中開路控制部分和閉路控制部分是平行安排的. 因此,我們就有

$$\left.\begin{aligned} F_4(s)X(s) &= Y_1(s) \\ \text{和} \quad Y(s) &= F_2(s)\{Y_1(s) + F_1(s)[X(s) - F_3(s)Y(s)]\}. \end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

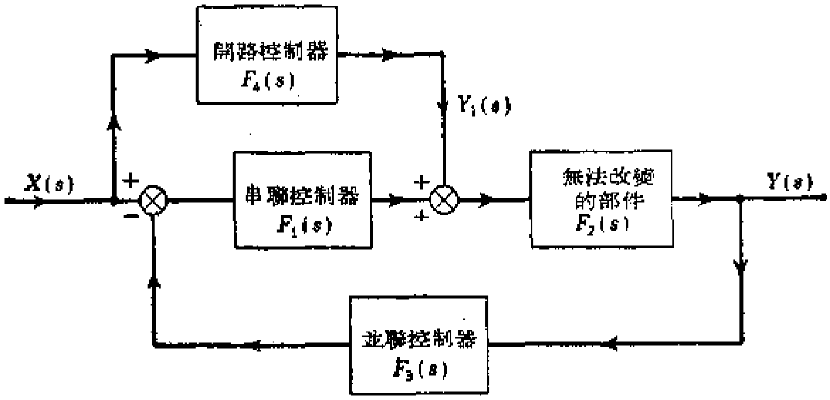



圖 4.10

把輸出 $Y(s)$ 解出來,就得

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{F_2(s)F_4(s) + F_1(s)F_2(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)F_3(s)}, \tag{4.36}$$

因此, 系統的穩定性和反應速度的特性決定於 $1 + F_1(s)F_2(s)F_3(s)$ 的零點, 而與 $F_4(s)$ 無關. 既然 $F_2(s)$ 是不能改變的,所以關於穩定性的設計問題就是要尋求適當的傳遞函數 $F_1(s)$ 和 $F_3(s)$. 系統的放大 $K = \left|\dfrac{F_2(0)F_4(0) + F_1(0)F_2(0)}{1 + F_1(0)F_2(0)F_3(0)}\right|$, 實際的反應速度以及穩態誤差不但與 $F_1(s)$, $F_2(s)$, $F_3(s)$ 有關, 而且還與開路控制部分的傳遞函數 $F_4(s)$ 有關. 因此,反饋迴路的設計可以完全決定系統的穩定性和反應的動力特性;至於系統的穩定狀態或是"同步運轉"的情况就與系統的開路控制部分有很密切的關係了. 所以,只要適當地設計 $F_1(s)$, $F_2(s)$ 和 $F_4(s)$ 就可以使系統不但穩定而且還具有相當好的控制性能.

如果系統中有許多需要同時加以控制的變數,而且這些變數之間也有關聯的話(例如火力發電站的情形). 那末,系統的方塊圖也就是多迴路的,而且其中的反饋關係也比較複雜[2]. 這種複雜系統的一個極端的例子大概就是飛機的自動控制系統和導航系統了[3]. 對於這樣一個系統的分析工作, 雖然也還是根據這一章對於簡單的伺服系統所提出的同樣的一些原則進行的, 但是由於系統過分複雜, 如果不依靠模擬計算機,這種分析工作簡直是無法進行的,然而這不是我們這裏所要討論的問題,因為它只是一個"工程推演"的工作——把理論變成實踐的工作.

---

1) J. R. Moore, *Proc. IRE*, **39**, 1421—1432 (1951) 俄文譯本[30]).
2) 例如,可以參閱 J. Hänny, "Regelung Theorie," A. G. Gebr. Leemann Co., Zürich, 1946.
3) J. B. Rea, *Aeronaut. Eng. Rev.*, November, 1951, p. 39.

# 第 五 章

# 不互相影響的控制

如果在一個復雜系統中有若干個被控制量，而且在這些被控制量之間也還存在着相互的作用，那末，一般說來，對於這種系統就必須再增加一個新的設計準則，這就是不互相影響的準則．舉例來說，一個有補充燃燒的渦輪噴氣發動機的變數是：壓縮機的轉速，燃燒室的噴油速率，補充燃燒室的噴油速率以及尾噴管開口面積．然而，發動機的運轉狀態可以設法只由壓縮機的轉速，燃燒室的噴油速率和補充燃燒室的噴油速率這三個量所完全控制．但是，在一般的情況下，這三個量是互相有影響的．不難想到，在這個情況中，系統的伺服控制就有一個新的設計準則，也就是要求對這三個不同的量的控制是不互相影響的：補充燃燒室的噴油速率的改變不應該使壓縮機的轉速受到影響，而且改變壓縮機轉速的時候也不需要改變燃燒室的噴油速率．這也就是說解決這個特殊的設計問題的關鍵就是：設法使尾噴管的開口隨着其餘的變數發生適當的變化而且適當地設計自動控制機構．這一章的目的就是要給出一個設計這一類不互相影響的控制系統的普遍方法，這個方法對於不論多麼複雜的系統都是適用的．這個方法最初是由勃克森包姆(A. S. Boksenbom)和胡德(R. Hood)所提出的[1]後來卡瓦那(R. J. Kavanagh)用矩陣表示法把這類問題作了一般性的處理[2]．早在 1934 年蘇聯學者沃斯涅先斯基(И. И. Вознесенский)就提出過類似的方法[31]．

## 5.1 單變數系統的控制

我們先來考慮一個簡單的系統，這個系統只有一個被控制的輸出 $y(t)$ 和一個作爲控制信號的輸入 $x(t)$．$y(t)$ 和 $x(t)$ 的拉氏變換就是 $Y(s)$ 和 $X(s)$．我們來考慮按照圖 5.1 所設計的控制系統．$E(s)$ 是"發動機"的傳遞函數，$L(s)$ 是測量儀器的傳遞函數（也就是反饋綫路的傳遞函數），$S(s)$ 是伺服馬達的傳遞函數，$C(s)$ 是"控制"的傳遞函數．可

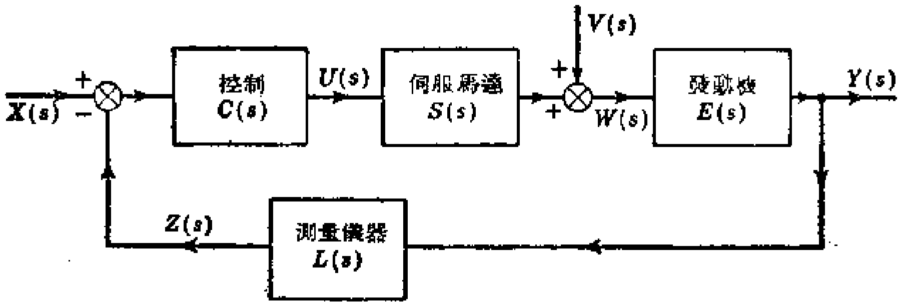



圖 5.1

1) A. S. Boksenbom and R. Hood, *NACA TR*, 980 (1950).
2) R. J. Kavanagh, *J. Franklin Inst.*, **262**, No. 5, 349 (1956).

以由設計者容易地加以改變的只有 $C(s)$ 這一個傳遞函數. 這個系統與圖 4.2 的反饋伺服系統之間的一點很小的區別就是：在伺服馬達與發動機之間加上了一個任意的擾動 $V(s)$,用這個擾動來表示某些意外的外界影響.

發動機的輸入 $W(s)$ 與輸出 $Y(s)$ 之間的關係是

$$Y(s) = E(s)W(s) = E(s)[S(s)U(s) + V(s)], \tag{5.1}$$

$U(s)$ 是控制傳遞函數的輸出,並且又有下列關係：

$$U(s) = C(s)[X(s) - Z(s)] = C(s)[X(s) - L(s)Y(s)]. \tag{5.2}$$

從方程(5.1)和(5.2)裏把 $U(s)$ 消去,就有

$$Y(s) = \frac{E(s)S(s)C(s)}{E(s)S(s)C(s)L(s)+1}X(s) + \frac{E(s)}{E(s)S(s)C(s)L(s)+1}V(s). \tag{5.3}$$

這就是在 $x(t)$ 與 $y(t)$ 的適當的初始條件之下的輸出的拉氏變換. 如果不考慮包含擾動 $V(s)$ 的第二項,方程(5.3)就與以前關於一般的反饋伺服系統的方程(4.3)是相同的. 系統的性能的分析也還可以按照與以前類似的辦法來進行. 然而,對於更複雜的系統來說,就必須把這個簡單的情況加以推廣. 現在我們就來作這件事情.

### 5.2 多變數系統的控制

假定發動機的輸出 $Y_1(s)$, $Y_2(s)$, ···, $Y_\nu(s)$, ···, $Y_i(s)$ 的個數是 $i$, 輸入 $W_1(s)$, $W_2(s)$, ···, $W_k(s)$, ···, $W_n(s)$ 的個數是 $n$. 那末,方程(5.1)的推廣就是：

$$\left.\begin{aligned} Y_1(s) &= E_{11}(s)W_1(s) + E_{12}(s)W_2(s) + \cdots + E_{1n}(s)W_n(s), \\ Y_2(s) &= E_{21}(s)W_1(s) + E_{22}(s)W_2(s) + \cdots + E_{2n}(s)W_n(s), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_i(s) &= E_{i1}(s)W_1(s) + E_{i2}(s)W_2(s) + \cdots + E_{in}(s)W_n(s), \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

其中每一個 $E_{jk}$ 都是一個傳遞函數, 當這個傳遞函數"作用"在輸入 $W_k(s)$ 上的時候, 就得出輸出 $Y_j(s)$ 的相應的組成部分. 在普通情況下, $E_{jk}(s)$ 是兩個 $s$ 的多項式的比值, 因此 $E_{jk}(s)$ 可以由發動機的特性的理論分析得到,也可以用實驗的方法由頻率特性確定. 方程(5.4)可以簡寫爲

$$Y_\nu(s) = \sum_{k=1}^{n} E_{\nu k}(s)W_k(s) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, i). \tag{5.5}$$

所有的 $E_{jk}(s)$ 按照方程(5.4) 中的位置所排成的矩形表格可以稱爲發動機的傳遞函數矩陣 $E$. 我們可以這樣想像：所有的輸入 $W_k(s)$ 在縱方向上"進入"矩陣, 所有的輸出 $Y_\nu(s)$ 在橫方向上"離開"矩陣[24]. 圖 5.2 所表示的就是這種情況. 下面我們來考慮輸入的個數大於(或等於)輸出的個數的情形, 也就是 $n \geqslant i$. 因此,矩陣 $E$ 就是一個縱行比橫行多的矩形矩陣. 爲了以後的需要,我們把只由前 $i$ 個縱行所組成的正方矩陣用 $E^*$

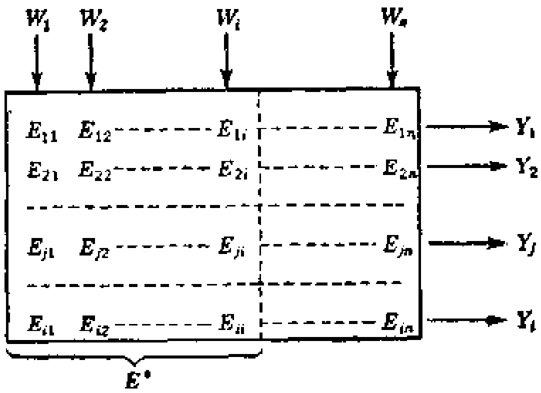



圖 5.2

來表示.

既然發動機的輸入的個數大於輸出的個數，所以，如果希望完全確定系統的運轉狀態，除了要設法使所有輸出 $Y_\nu(s)$ 隨預定的數值 $X_j(s)$ $(j=1, 2, \cdots, i)$ 相應地變化之外，還要設法使變數 $W_\mu(s)$ $(\mu=i+1, i+2, \cdots, n)$ 也取預定的數值 $\Xi_\mu(s)$. 因此，被控制量就是 $i$ 個輸出 $Y_\nu(s)$ $(\nu=1, 2, \cdots, i)$ 和 $n-i$ 個發動機輸入 $W_\mu(s)$ $(\mu=i+1, i+2, \cdots, n)$. 如果由測量儀器對 $W_\mu(s)$ 所測出來的值是 $\Upsilon_\mu(s)$，那末，誤差就是 $\Xi_\mu(s)-\Upsilon_\mu(s)$. 發動機的輸出的偏差的定義是 $X_\nu(s)-Z_\nu(s)$，$Z_\nu(s)$ $(\nu=1, 2, \cdots, i)$ 就是 $Y_\nu(s)$ 經過測量儀器所測量出的數值，就像圖 5.1 的那種情形. 控制的作用就在於把這些偏差當作輸入來產生伺服馬達的改正信號 $U_k(s)$. 這就是系統的反饋作用. 在我們所討論的一般的系統(5.4)裏，改正信號 $U_k(s)$ 與所有偏差的關係是綫性的. 既然有 $n$ 個偏差信號，也就有 $n$ 個改正信號，所以 $k=1, 2, \cdots, n$. 因此就有

$$\left.\begin{aligned}
U_1(s) &= C_{11}(X_1-Z_1)+C_{12}(X_2-Z_2)+\cdots+C_{1i}(X_i-Z_i)\\
&\quad +C'_{1,i+1}(\Xi_{i+1}-\Upsilon_{i+1})+\cdots+C'_{1n}(\Xi_n-\Upsilon_n),\\
U_2(s) &= C_{21}(X_1-Z_1)+C_{22}(X_2-Z_2)+\cdots+C_{2i}(X_i-Z_i)\\
&\quad +C'_{2,i+1}(\Xi_{i+1}-\Upsilon_{i+1})+\cdots+C'_{2n}(\Xi_n-\Upsilon_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
U_n(s) &= C_{n1}(X_1-Z_1)+C_{n2}(X_2-Z_2)+\cdots+C_{ni}(X_i-Z_i)\\
&\quad +C'_{n,i+1}(\Xi_{i+1}-\Upsilon_{i+1})+\cdots+C'_{nn}(\Xi_n-\Upsilon_n),
\end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

在這個關係式中，我們已經把控制矩陣用不同的符號分成 $C$ 和 $C'$ 兩部分，以便區別兩種不同的誤差信號. 方程(5.6)可以簡寫成

$$U_k(s)=\sum_{\nu=1}^{i} C_{k\nu}(X_\nu-Z_\nu)+\sum_{\mu=i+1}^{n} C'_{k\mu}(\Xi_\mu-\Upsilon_\mu)\quad \begin{matrix}\nu=1, 2, \cdots, i\\ k=1, 2, \cdots, n.\end{matrix} \tag{5.7}$$

當然，每一個 $C_{k\nu}$ 和 $C'_{k\mu}$ 都是兩個 $s$ 的多項式的比值. 方程(5.6)或方程(5.7)也可以用圖 5.3 來表示:

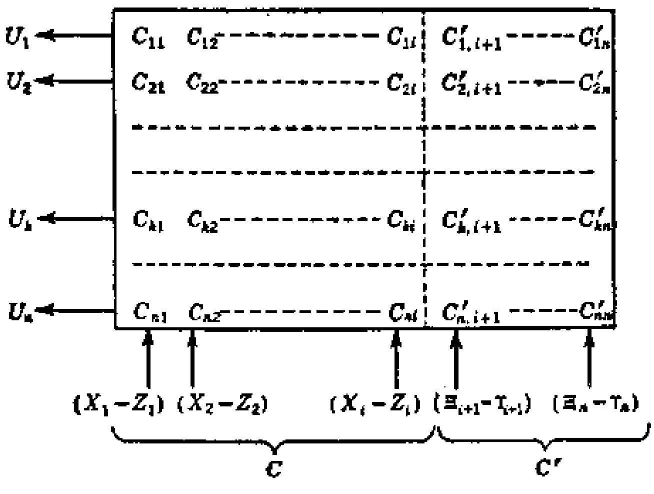



圖 5.3

測量出的數值 $Z_\nu(s)$ 和 $\Upsilon_\mu(s)$ 與被測量的 $Y_\nu(s)$ 和 $W_\mu(s)$ 之間關係，由測量儀器的傳遞函數 $L_{\nu\nu}(s)$ 和 $L_{\mu\mu}(s)$ 所確定:

$$Z_\nu(s)=L_{\nu\nu}(s)Y_\nu(s), \tag{5.8}$$

$$\Upsilon_\mu(s)=L_{\mu\mu}(s)W_\mu(s). \tag{5.9}$$

每一個改正信號都個別地作用在伺服馬達上. 伺服馬達的輸出與意外的外界擾動 $V_k(s)$ 合併在一起組成發動機的輸入 $W_k(s)$. 如果 $S_{kk}(s)$ 是伺服馬達的傳遞函數，那末

$$W_k(s)=S_{kk}(s)U_k(s)+V_k(s)\quad k=1, 2, \cdots, n. \tag{5.10}$$

從(5.4)到(5.10)的所有方程就是描述多變數控制系統的完備的方程組．圖 5.4 是一個多變數控制系統的方塊圖，這個系統有三個發動機輸出 $Y_1(s)$，$Y_2(s)$ 和 $Y_3(s)$，還有兩個被控制的發動機輸入 $W_4(s)$ 和 $W_5(s)$．除了規定的控制信號 $X_\nu(s)$，$\Xi_\mu(s)$ 與可以對系統起作用的外界擾動信號 $V_k(s)$ 以外，整個控制系統是閉合的．

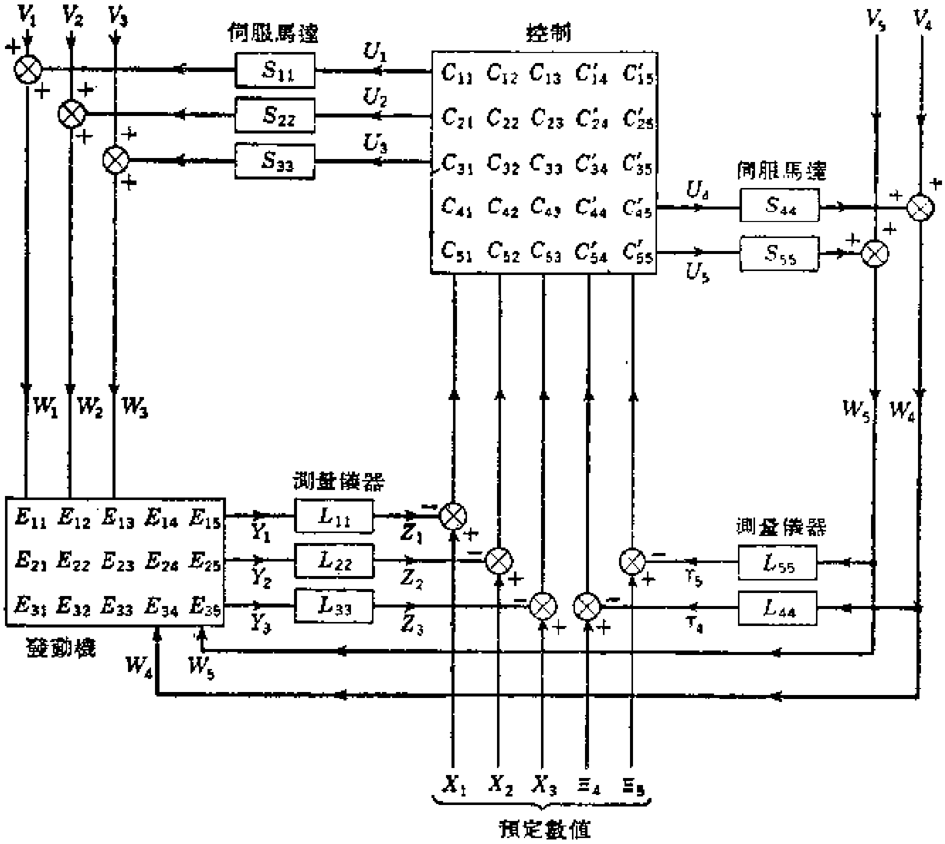



圖 5.4

在以上的控制系統方程組中把 $U_k(s)$，$Z_\nu(s)$ 和 $Y_\mu(s)$ 消去，就得到

$$Y_j(s) = \sum_{k=1}^{n}\Big\{\sum_{\nu=1}^{i} E_{jk}(s)S_{kk}(s)C_{k\nu}(s)[X_\nu(s) - L_{\nu\nu}(s)Y_\nu(s)]$$

$$+\sum_{\mu=i+1}^{n} E_{jk}(s)S_{kk}(s)C'_{k\mu}(s)[\Xi_\mu(s) - L_{\mu\mu}(s)W_\mu(s)] + E_{jk}(s)V_k(s)\Big\} \quad (5.11)$$

和

$$W_k(s) = \sum_{\nu=1}^{i} S_{kk}(s)C_{k\nu}(s)[X_\nu(s) - L_{\nu\nu}(s)Y_\nu(s)]$$

$$+\sum_{\mu=i+1}^{n} S_{kk}(s)C'_{k\mu}(s)\,[\Xi_\mu(s) - L_{\mu\mu}(s)W_\mu(s)] + V_k(s). \quad (5.12)$$

根據方程(5.11)和(5.12)就可以把系統畫成一個比圖 5.4 更簡單一些的方塊圖圖 5.5．在這個圖裏只有一個系統矩陣，這個矩陣的輸入是那些被控制量的偏差，輸出就是那些被控制量．在圖 5.5 中的 $ESC$ 矩陣中，位於第 $j$ 橫行與第 $\nu$ 縱行的交點的元素是

$\sum\limits_{k=1}^{n} E_{jk}S_{kk}C_{k\nu}$. 同樣,在 $ESC'$ 矩陣中，第 $j$ 橫行與第 $\mu$ 縱行的交點處的元素是 $\sum\limits_{k=1}^{n} E_{jk}S_{kk}C'_{k\mu}$. 也還是一樣, $SC$ 矩陣中的元素是 $S_{kk}C_{k\mu}$. $SC'$ 矩陣中的元素是 $S_{kk}C'_{k\mu}$. 外界擾動是通過另外一個矩陣加進來的,那個矩陣主要是由發動機矩陣 $E$ 所組成的.

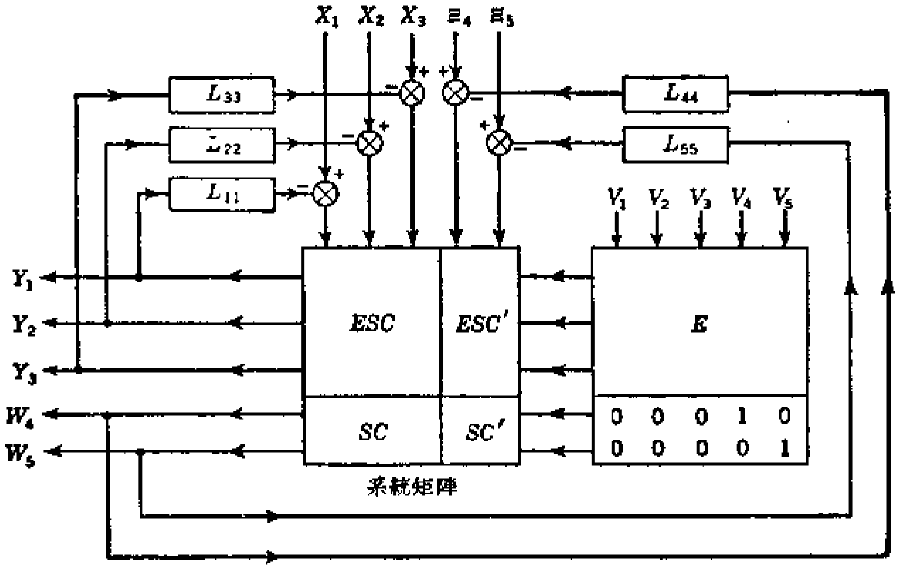



圖 5.5

## 5.3 不互相影響的條件

以上我們所討論的是多變數系統的控制作用的機理，在這個基礎上我們就可以把控制系統的不互相影響準則具體地表達出來. 現在的問題就是:設法確定控制矩陣的元素 $C_{k\nu}(s)$ 與 $C'_{k\mu}(s)$ 須要滿足什麽條件才能使規定的控制信號 $X_j(s)$ 與 $\Xi_\mu(s)$ 只影響和它們相應的被控制量 $Y_j(s)$ 和 $W_\mu(S)$ (這裏, $j=1, 2, \cdots, i$ 而 $\mu = i+1, i+2, \cdots, n$), 而不影響其餘的被控制量. 譬如說,控制信號 $X_2(s)$ 只能影響 $Y_2(s)$, $\Xi_{i+1}(s)$ 只能影響 $W_{i+1}(s)$. 這裏的數學問題也就是如何把圖 5.5 中的系統矩陣加以對角綫化的問題. 我們所以要把設計條件放在控制矩陣 $C$ 和 $C'$ 上,是因爲在整個系統中只有這一部分是最容易由設計者加以變動的. 發動機的特性,伺服馬達以及測量儀器都認爲是已經固定的,它們也不能由控制工程師隨意改變.

讓我們來考慮一個特定的輸出 $Y_g(s)$, $g$ 是 $1, 2, \cdots, i$ 這些數中的任意一個數. 方程(5.11)和方程(5.12)可以寫成

$$
\begin{aligned}
Y_j(s) = \sum_{k=1}^{n}\Bigg[\sum_{\nu=1,\ \nu\neq g}^{i} & E_{jk}S_{kk}C_{k\nu}(X_\nu - L_{\nu\nu}Y_\nu) \\
& + \sum_{\mu=i+1}^{n} E_{jk}S_{kk}C'_{k\mu}(\Xi_\mu - L_{\mu\mu}W_\mu) + E_{jk}V_k\Bigg] \\
& + \sum_{k=1}^{n} E_{jk}S_{kk}C_{kg}(X_g - L_{gg}Y_g)
\end{aligned}
$$

和

$$W_k(s) = \sum_{\nu=1,\ \nu\neq g}^{i} S_{kk}C_{k\nu}(X_\nu - L_{\nu\nu}Y_\nu)$$

$$+ \sum_{\mu=i+1}^{n} S_{kk}C'_{k\mu}(\Xi_\mu - L_{\mu\mu}W_\mu) + V_k + S_{kk}C_{kg}(X_g - L_{gg}Y_g).$$

現在爲了使得控制信號 $X_g$ 除了 $Y_g$ 之外不影響任何一個 $Y_j$ 或 $W_\mu$，所以，在 $j\neq g$ 與 $k>i$ 的情形下，以上兩個方程的最後一項都必須等於零．因此，對於 1, 2, …, $i$ 中的任意一個數 $g$ 都有：

$$\text{如果 } j\neq g,\quad \sum_{k=1}^{n} E_{jk}S_{kk}C_{kg} = 0, \tag{5.13}$$

以及

$$\text{如果 } k>i,\qquad C_{kg} = 0. \tag{5.14}$$

方程(5.14)使我們的控制矩陣立刻就得到簡化． 以圖 5.4 所表示的系統爲例，這時 $i=3$, $n=5$． 在這個情形下，方程(5.14)就表示

$$C_{41} = C_{42} = C_{43} = C_{51} = C_{52} = C_{53} = 0.$$

方程(5.14)也可以用來簡化方程(5.13)，方程(5.13)也就是

$$\sum_{k=1}^{i} E_{jk}S_{kk}C_{kg} = \sum_{k=1}^{i} \delta_{jg}E_{gk}S_{kk}C_{kg}, \tag{5.15}$$

這裏的 $g$ 是 1, 2, …, $i$ 中的任意一個數，$\delta_{jg}$ 是克隆內克符號(Kronecker delta)，它的定義是

$$\left.\begin{aligned} &\text{如果 } j\neq g,\quad \delta_{jg}=0,\\ &\text{如果 } j=g,\quad \delta_{jg}=1.\end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

對於任意一個特定的 $g$ 來說，方程(5.15)就是一個綫性代數方程組，這個方程組包含 $i-1$ 個方程和 $i$ 個未知數 $S_{kk}C_{kg}$（這裏 $k=1, 2, \cdots, i$）． 因此，我們只能確定這些未知數的比值，而不能確定這些未知數本身． 然而，這正是我們所希望的，因爲我們並不希望控制傳遞函數已經被完全確定，在現在這種情况下，我們的設計工作反而可以更加自由一些．

爲了求出控制傳遞函數的這些比值，我們要利用行列式的一個性質：假設行列式 $|E^*|$（$|E^*|$ 是正方矩陣 $E^*$ 的行列式）中的元素 $E_{jl}$ 的餘因式是 $|E^*_{jl}|$，那末，下面的關係式成立[24]：

$$\left.\begin{aligned} &\text{如果 } k\neq l,\quad \sum_{j=1}^{i} E_{jk}\,|E^*_{jl}| = 0,\\ &\text{如果 } k=l,\quad \sum_{j=1}^{i} E_{jk}\,|E^*_{jl}| = |E^*|.\end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

把方程(5.15)先用 $|E^*_{jl}|$ 乘一下，然後再對 $j$ 求和，我們就得到

$$\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=1}^{i} |E^*_{jl}|\,\delta_{jg}E_{gk}S_{kk}C_{kg} = \sum_{k=1}^{i}\sum_{j=1}^{i} |E^*_{jl}|\,E_{jk}S_{kk}C_{kg}.$$

因此，根據方程(5.17)，就有

$$S_{ll}C_{lg}=|E^*_{gl}|\sum_{k=1}^{i}E_{gk}S_{kk}C_{kg}/|E^*|\quad l=1,2,\cdots,i. \tag{5.18}$$

特別當 $l=g$ 時，有

$$S_{gg}C_{gg}=|E^*_{gg}|\sum_{k=1}^{i}E_{gk}S_{kk}C_{kg}/|E^*|.$$

取方程(5.18)和上面這個方程的比值，我們就可以寫

$$\frac{S_{jj}C_{jv}}{S_{vv}C_{vv}}=\frac{|E^*_{vj}|}{|E^*_{vv}|},\quad j,v=1,2,\cdots,i. \tag{5.19}$$

利用這個方程就可以把 $SC$ 矩陣中不在對角綫上的元素用對角綫上的元素表示出來.

方程(5.14)和方程(5.19)所表示的條件就是被控制量 $Y_g$ 不互相影響的必要條件. 這些條件最先是由勃克森包姆和胡德提出來的. 他們兩個人還進一步證明：這些條件也是不互相影響的充分條件. 因此，設計一個合適的控制矩陣 $C$ 的問題就完全解决了.

爲了解决控制矩陣的另外一部分 $C'$ 的設計問題，我們就必須考慮被控制量 $W_\mu$ $(\mu=i+1,i+2,\cdots,n)$ 的不互相影響的條件，爲了這個目的，我們把方程(5.11)和方程(5.12)改寫爲

$$\begin{aligned}Y_j(s)=\sum_{k=1}^{n}\Big[&\sum_{v=1}^{i}E_{jk}S_{kk}C_{kv}(X_v-L_{vv}Y_v)\\&+\sum_{\substack{\mu=i+1\\ \mu\neq r}}^{n}E_{jk}S_{kk}C'_{k\mu}(\Xi_\mu-L_{\mu\mu}W_\mu)+E_{jk}V_k\Big]\\&+\sum_{k=1}^{n}E_{jk}S_{kk}C'_{kr}(\Xi_r-L_{rr}W_r)\end{aligned} \tag{5.20}$$

和

$$\begin{aligned}W_k(s)=&\sum_{v=1}^{i}S_{kk}C_{kv}(X_v-L_{vv}Y_v)\\&+\sum_{\substack{\mu=i+1\\ \mu\neq r}}^{n}S_{kk}C'_{k\mu}(\Xi_\mu-L_{\mu\mu}W_\mu)+V_k+S_{kk}C'_{kr}(\Xi_r-L_{rr}W_r),\end{aligned} \tag{5.21}$$

這裏 $r$ 是 $i+1,\ i+2,\cdots,n$ 中的任意一個數，而 $j=1,2,\cdots,i$. 爲了現在的目的，方程(5.21)中的 $k$ 只是 $i+1,\ i+2,\ \cdots,\ n$ 中的任意一個數，因爲只有這些 $W_k$ 才是被控制量. 根據方程(5.20)和方程(5.21)顯然可以看出，如果控制信號 $\Xi_r$ 僅只影響被控制量 $W_r$，那末，這兩個方程的最後一項就必須等於零. 也就是

$$\sum_{k=1}^{n}E_{jk}S_{kk}C'_{kr}=0\qquad j=1,2,\cdots,i \tag{5.22}$$

和

$$C'_{kr}=0,\quad k,r=i+1,i+2,\cdots,n;\quad k\neq r. \tag{5.23}$$

和以前一樣，方程(5.23)也使控制矩陣得到簡化. 以圖 5.4 所表示的系統爲例，$i=3$，$n=5$. 就有

$$C'_{45} = C'_{54} = 0.$$

方程(5.23)也可以用來簡化方程(5.22)．方程(5.22)化為

$$\sum_{k=1}^{i} E_{jk} S_{kk} C'_{kr} = -E_{jr} S_{rr} C'_{rr}.$$

把這個方程的兩端先用 $|E^*_{jl}|$ 乘，然後再對 $j$ 求和，就得

$$\sum_{k=1}^{i} \sum_{j=1}^{i} |E^*_{jl}| E_{jk} S_{kk} C'_{kr} = -S_{rr} C'_{rr} \sum_{j=1}^{i} |E^*_{jl}| E_{jr}.$$

根據方程(5.17)所表示的行列式的性質，就有

$$|E^*| S_{ll} C'_{lr} = -S_{rr} C'_{rr} \sum_{j=1}^{i} |E^*_{jl}| E_{jr}.$$

如果把這個方程裏的 $l$ 換成 $j$，$j$ 換成 $l$，這個方程可以寫成下列形式：

$$\frac{S_{jj} C'_{jr}}{S_{rr} C'_{rr}} = -\frac{1}{|E^*|} \sum_{l=1}^{i} |E^*_{lj}| E_{lr}, \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \cdots, i, \\ r = i+1, i+2, \cdots, n. \end{matrix} \tag{5.24}$$

利用這個方程就可以把 $SC'$ 矩陣中不在對角綫上的元素用對角綫上的元素表示出來了．方程(5.23)和方程(5.24)是被控制量 $W_\mu(s)$ $(\mu = i+1, i+2, \cdots, n)$ 的不互相影響的必須而且充分的條件．

如果希望全部被控制量都互相不影響，那末，就必須滿足方程(5.14)，(5.19)，(5.23)和(5.24)所表示的條件．在整個的控制矩陣中，不在對角綫上的元素或者等於零，或者可以由對角綫上的元素表示．如果表示發動機的特性的發動機矩陣是已知的，那末，控制矩陣的對角綫元素就完全確定了整個的控制矩陣．

## 5.4 反應方程

如果不互相影響的條件已經全部被滿足，那末，方程(5.11)和(5.12)就變簡單得多．例如，把方程(5.11)的求和的次序倒換一下，就有

$$\begin{aligned} Y_j(s) = & \sum_{\nu=1}^{i} [X_\nu(s) - L_{\nu\nu}(s) Y_\nu(s)] \sum_{k=1}^{n} E_{jk} S_{kk} C_{k\nu} \\ & + \sum_{\mu=i+1}^{n} [\Xi_\mu(s) - L_{\mu\mu}(s) W_\mu(s)] \sum_{k=1}^{n} E_{jk} S_{kk} C'_{k\mu} + \sum_{k=1}^{n} E_{jk} V_k. \end{aligned}$$

按照方程(5.13)和(5.14)，除了 $\nu = j$ 以外，第一項中對 $k$ 所作的和數都等於零．按照方程(5.22)第二項也等於零．因此

$$Y_j(s) = [X_j(s) - L_{jj}(s) Y_j(s)] \sum_{k=1}^{i} E_{jk} S_{kk} C_{kj} + \sum_{k=1}^{n} E_{jk} V_k.$$

按照方程(5.19)，$S_{kk} C_{kj}$ 既然可以用對角綫元素 $S_{jj} C_{jj}$ 來表示，於是，利用方程(5.17)就有

$$\sum_{k=1}^{i} E_{jk} S_{kk} C_{kj} = \frac{S_{jj} C_{jj}}{|E^*_{jj}|} \sum_{k=1}^{i} E_{jk} |E^*_{jk}| = S_{jj} C_{jj} \frac{|E^*|}{|E^*_{jj}|}.$$

所以，最後就得到

$$Y_j(s) = \frac{|E^*|}{|E^*_{jj}|} S_{jj} C_{jj} [X_j(s) - L_{jj}(s) Y_j(s)] + \sum_{k=1}^{n} E_{jk} V_k. \tag{5.25}$$

根據不互相影響的條件，經過類似的計算，也可以把方程(5.12)簡化為

$$W_\mu(s) = S_{\mu\mu}C'_{\mu\mu}\,[\Xi_\mu(s) - L_{\mu\mu}(s)W_\mu(s)] + V_\mu(s)$$
$$\mu = i+1,\, i+2,\, \cdots,\, n. \tag{5.26}$$

我們規定兩個符號：

$$R_{jj} = \frac{|E^*|\,S_{jj}C_{jj}}{|E^*|S_{jj}C_{jj}L_{jj} + |E^*_{jj}|} \tag{5.27}$$

和

$$R'_{\mu\mu} = \frac{S_{\mu\mu}C'_{\mu\mu}}{S_{\mu\mu}C'_{\mu\mu}L_{\mu\mu} + 1}, \tag{5.28}$$

方程(5.25)和(5.26)的解就可以寫作

$$Y_j(s) = R_{jj}(s)X_j(s) - [R_{jj}(s)L_{jj}(s) - 1]\sum_{k=1}^{n} E_{jk}(s)V_k(s) \tag{5.29}$$

和

$$W_\mu(s) = R'_{\mu\mu}(s)\Xi_\mu(s) - [R'_{\mu\mu}(s)L_{\mu\mu}(s) - 1]V_\mu(s). \tag{5.30}$$

方程(5.29)和(5.30)給出了由控制信號和外界擾動來計算被控制量的關係，這兩個方程就稱為反應方程. 這些關係式與只有一個被控制量的簡單系統的關係式(5.3)是十分相像的. 函數 $R_{jj}(s)$ 是從輸入 $X_j(s)$ 到輸出 $Y_j(s)$ 的總的傳遞函數. 函數 $R'_{\mu\mu}(s)$ 是從輸入 $\Xi_\mu(s)$ 到輸出 $W_\mu(s)$ 的總的傳遞函數. 按照方程(5.27)和(5.28)，根據發動機，伺服馬達，測量儀器和控制部分這四方面的特性就可以把這兩個總的傳遞函數計算出來. 實際的設計手續就是先按照第四章所講的辦法對於每一個 $j$ 和 $\mu$ 確定合適的控制傳遞函數 $C_{jj}(s)$ 和 $C'_{\mu\mu}(s)$，使它們具有滿意的性能，然後，再按照方程(5.14)，(5.19)，(5.23)和(5.24)把不在對角線上的元素也確定下來. 這樣作了以後，對於複雜的多變數系統我們就得到一個性能良好的不互相影響的控制系統.

### 5.5 渦輪螺旋槳發動機的控制

作為不互相影響的控制的普遍理論的一個簡單的例子，我們來考慮一個渦輪螺旋槳發動機的控制問題(圖 5.6). 這樣一個發動機的運轉狀態的變數是：轉速，渦輪的進氣溫度，螺旋槳的槳葉角以及噴油速率. 控制系統的設計要求是使發動機能夠產生各種可能的正規的穩態運轉狀態. 對於每一種穩態運轉狀態，我們都必須研究在那個運轉點附近的過渡狀態之下的控制性能. 假設 $W_1(s)$ 是螺旋槳槳葉角與正規值之間的偏差的拉氏變換，$W_2(s)$ 是噴油速率與正規值之間的偏差的拉氏變換. 既然我們只對離正規運轉點很近的過渡狀態發生興趣，所以渦輪轉矩被壓縮機與螺旋槳用掉一部分以後的剩餘轉矩，螺旋槳槳葉角，噴油速率這三者之間的關係可以線性化. 因此，剩餘轉矩就可以表示為 $W_1(s)$ 與 $W_2(s)$ 的線性組合. 假設轉速與它的正規值之間的偏差的拉氏變換是 $Y_1(s)$，剩餘轉矩就可以

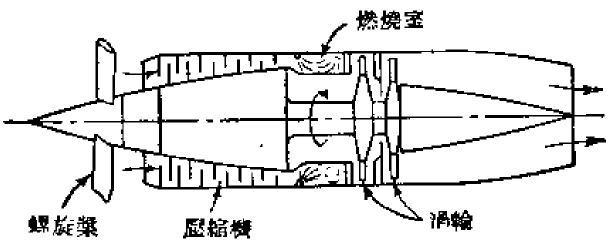


圖 5.6

用 $(1+\tau s)Y_1(s)$ 來表示，這裏的 $\tau$ 是由於發動機的轉動部分的慣性所產生的時間常數(可以參看方程(4.1))。 $\tau$ 的值與所考慮的正規運轉點有關，因爲方程(4.1)中的阻尼系數 $c$ 與轉速有關。因此，

$$(1+\tau s)Y_1(s) = -aW_1(s) + bW_2(s), \tag{5.31}$$

其中的 $a$ 和 $b$ 都是正實常數，這兩個常數都可以由正規運轉點附近的發動機特性推算出來。 $a$ 和 $b$ 的物理意義是這樣的：如果噴油速率一直保持正規值，$W_2(s)\equiv 0$。由方程(5.31)就得出 $a=-Y_1(0)/W_1(0)$。但是 $s=0$ 相當於穩態狀態，所以，$a$ 就是當噴油速率保持常數時，發動機的穩態轉速的減少與螺旋槳槳葉角的增加的比值。如果，對於有各種不同的常數噴油速率的穩態運轉狀態，把轉速對於螺旋槳槳葉角畫出圖綫來，那末，在圖綫上被選定的正規運轉點處的斜率就是 $a$。同樣地，如果螺旋槳槳葉角是常數，我們也可以把穩態狀態的轉速對於噴油速率畫出圖綫來，在這種圖綫上被選定的正規運轉點處的斜率就是 $b$[32, 33]。所以，$a$ 和 $b$ 這兩個常數可以由表示發動機的穩態狀態的圖綫表達出來。

對於軸式壓縮機來說，在給定的壓縮機轉速和一定的進口條件之下，經過壓縮機的空氣的質量幾乎是不變的。所以，在一個給定的進口條件之下，加到氣體中去的熱量與氣體的質量的比值就是發動機轉速與噴油速率的函數。因而，發動機轉速和噴油速率就確定了進口溫度。假設渦輪的進口溫度及它的正規值之間的偏差的拉氏變換是 $Y_2(s)$，那末，在 $Y_2(s)$，$Y_1(s)$ 與 $W_2(s)$ 之間也可以建立一個類似於方程(5.31)的方程。然而氣體達到熱平衡狀態的時間常數實際上等於零，所以，方程也比較簡單些：

$$Y_2(s) = cW_2(s) - eY_1(s), \tag{5.32}$$

這裏的 $c$ 和 $e$ 也還是正實常數。事實上，如果對於不變的發動機轉速畫出渦輪進口溫度與噴油速率之間的關係圖綫，那末，在選定的正規的穩態運轉點處的斜率就是 $c$。同樣地，如果，對於不變的噴油速率，畫出渦輪進口溫度與發動機轉速之間的關係圖綫，那末，在選定的正規的穩態運轉點處的斜率就是 $e$。

從方程(5.31)和(5.32)中把 $Y_1(s)$ 和 $Y_2(s)$ 解出來，我們就得到

$$\left.\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{-a}{1+\tau s}W_1(s) + \frac{b}{1+\tau s}W_2(s),\\ Y_2(s) &= \frac{ae}{1+\tau s}W_1(s) + \frac{(c-be)+c\tau s}{1+\tau s}W_2(s).\end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

這個方程組就給出了我們在理論分析中所用的發動機矩陣 $E$。我們注意到這樣一個有趣的事實：在發動機矩陣裏只包含一個時間常數 $\tau$。只有這一個時間常數是發動機本身所固有的。當然，整個的控制系統中還有其他的時間常數，但是，那些時間常數是由控制部分，伺服馬達以及測量儀器所引進來的，所以它們不包含在發動機矩陣裏面。

讓我們先來考慮控制發動機轉速和噴油速率的情形。這時，被控制量就是 $Y_1(s)$ 和 $W_2(s)$。在這個情况下，我們只需要方程組(5.33)的第一個方程，並且 $i=1$，$n=2$。因而，發動機矩陣 $E$ 只有兩個元素：

$$E_{11} = \frac{-a}{1+\tau s}, \quad E_{12} = \frac{b}{1+\tau s}, \tag{5.34}$$

而

$$|E^*| = |E^*_{11}|\, E_{11} = E_{11}, \quad |E^*_{11}| = 1. \tag{5.35}$$

控制系統是由下列方程組所表示的：

$$\left.\begin{aligned} U_1(s) &= C_{11}(s)[X_1(s) - L_{11}(s)Y_1(s)] + C'_{12}(s)[E_2(s) - L_{22}(s)W_2(s)], \\ U_2(s) &= C_{21}(s)[X_1(s) - L_{11}(s)Y_1(s)] + C'_{22}(s)[E_2(s) - L_{22}(s)W_2(s)]. \end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

不互相影響的條件要求有下列關係：

$$C_{21}(s) = 0, \tag{5.37}$$

並且利用方程(5.35)，

$$\frac{S_{11}(s)C'_{12}(s)}{S_{22}(s)C'_{22}(s)} = \frac{-|E^*_{11}|\, E_{12}}{|E^*|} = -\frac{E_{12}}{E_{11}} = \frac{b}{a}. \tag{5.38}$$

既然 $-a$ 是發動機轉速對於螺旋槳槳葉角的偏導數，而 $b$ 是發動機轉速對於噴油速率的偏導數，所以，比值 $b/a$ 就是當發動機轉速不變時，螺旋槳槳葉角對於噴油速率的變化率。很明顯，這個比值是渦輪螺旋槳發動機的飛行狀況的函數。譬如說，比值 $b/a$ 是隨着高度的增加而增大的。因此，一個設計得很好的控制系統就必須能够隨時補償由於飛行狀態的變化和發動機運轉狀況的變化而引起的差異。

對於發動機轉速的反應函數 $R_{11}(s)$ 就是

$$R_{11}(s) = \frac{aS_{11}(s)C_{11}(s)}{aS_{11}(s)C_{11}(s)L_{11}(s) - (1+\tau s)},$$

對於噴油速率的反應函數 $R'_{22}(s)$ 就是

$$R'_{22}(s) = \frac{S_{22}(s)C'_{22}(s)}{S_{22}(s)C'_{22}(s)L_{22}(s) + 1}. \tag{5.39}$$

這兩個方程就確定了發動機轉速與噴油速率在不互相影響的控制狀態中的反應特性。現在的問題就歸結爲如何設計控制傳遞函數 $C_{11}(s)$ 和 $C'_{22}(s)$ 使得系統在我們所需要的所有運轉狀態下都具有使人滿意的性能。

現在，我們再來考慮控制渦輪螺旋槳發動機的第二種可能的辦法。我們要來控制發動機轉速和渦輪的進口溫度，現在的被控制量就是 $Y_1(s)$ 和 $Y_2(s)$，所以在這個情形裏，我們需要用到方程組(5.33)的兩個方程，而 $i = n = 2$。由不互相影響的條件就有

$$\frac{S_{22}(s)C_{21}(s)}{S_{11}(s)C_{11}(s)} = -\frac{ae}{(c-be)+c\tau s},$$

和

$$\frac{S_{11}(s)C_{12}(s)}{S_{22}(s)C_{22}(s)} = \frac{b}{a}. \tag{5.40}$$

對於發動機轉速的反應函數就是

$$R_{11}(s) = \frac{S_{11}(s)C_{11}(s)}{S_{11}(s)C_{11}(s)L_{11}(s) - \dfrac{(c-be)+c\tau s}{ac}},$$

對於渦輪的進口溫度的反應函數就是

$$R_{22}(s) = \frac{S_{22}(s)C_{22}(s)}{S_{22}(s)C_{22}(s)L_{22}(s) + (1/c)}. \tag{5.41}$$

### 5.6 有補充燃燒的渦輪噴氣發動機的控制

在這一章開始我們曾經談到有補充燃燒的渦輪噴氣發動機，現在我們來研究這種發動機的控制問題，圖 5.7 就是這種發動機的簡略構造圖．我們還是只來研究在一個選定的正規穩態運轉點附近的過渡狀態的控制問題，所以，把各個變數之間的關係加以綫性化還是合理的．

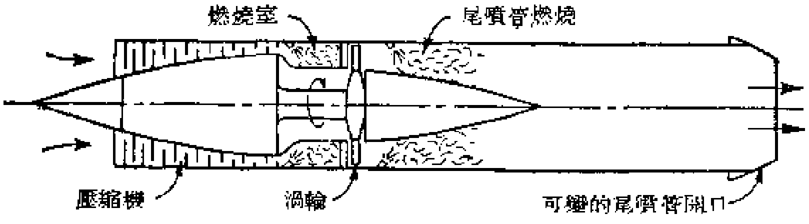


圖 5.7

假設 $Y_1(s)$ 仍然是發動機轉速與它的正規值之間的偏差的拉氏變換，$W_1(s)$ 是尾噴管開口面積與正規值之間的偏差的拉氏變換；$W_2(s)$ 是燃燒室的噴油速率與正規值之間的偏差的拉氏變換；最後，$W_3(s)$ 是尾噴管的噴油速率與正規值之間的偏差的拉氏變換．與渦輪螺旋槳發動機的方程(5.31)類似，我們可以寫出下列關係：

$$(1+\tau s)Y_1(s) = a_1W_1(s) + a_2W_2(s) + a_3W_3(s), \tag{5.42}$$

這裏的 $a_1$, $a_2$ 和 $a_3$ 都是實常數．和渦輪螺旋槳發動機的情形相像，這些常數都是發動機的穩態狀態曲綫的斜率．所以，當燃燒室的噴油速率和尾噴管的噴油速率都是常數的時候，發動機轉速對於尾噴管開口面積的變化率就是 $a_1$．同樣地，$a_2$ 就是發動機轉速對於燃燒室噴油速率的變化率；$a_3$ 就是發動機轉速對於尾噴管噴油速率的變化率．方程(5.42)裏的 $\tau$ 也還是發動機的唯一的時間常數，它表示轉動部件的慣性的影響．這一個關於發動機轉速與其他的發動機輸入之間的綫性關係是費德爾(M. S. Feder)和胡德(R. Hood)推導出來的[1]．

如果發動機的壓縮機是軸式壓縮機的話，前一節的方程(5.32)在這裏仍然是適用的．$Y_2(s)$ 所表示的是渦輪的進口溫度，所以

$$Y_2(s) = -eY_1(s) + cW_2(s).$$

從這個方程和方程(5.42)裏把 $Y_1(s)$ 和 $Y_2(s)$ 解出來，就得到

$$\left.\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{a_1}{1+\tau s}W_1(s) + \frac{a_2}{1+\tau s}W_2(s) + \frac{a_3}{1+\tau s}W_3(s), \\ Y_2(s) &= -\frac{a_1e}{1+\tau s}W_1(s) + \frac{(c-a_2e)+c\tau s}{1+\tau s}W_2(s) - \frac{a_3e}{1+\tau s}W_3(s). \end{aligned}\right\} \tag{5.43}$$

所以，發動機矩陣的元素就是

$$\left.\begin{aligned} E_{11} &= \frac{a_1}{1+\tau s}, & E_{12} &= \frac{a_2}{1+\tau s}, & E_{13} &= \frac{a_3}{1+\tau s}, \\ E_{21} &= -\frac{a_1e}{1+\tau s}, & E_{22} &= \frac{(c-a_2e)+c\tau s}{1+\tau s}, & E_{23} &= -\frac{a_3e}{1+\tau s}. \end{aligned}\right\} \tag{5.44}$$

我們來考慮控制發動機轉速，渦輪的進口溫度與尾噴管噴油速率的問題．這時的被

1) M. S. Feder and R. Hood, *NACA TN*, 2183 (1950).

控制量是 $Y_1(s)$, $Y_2(s)$ 和 $W_3(s)$. 而控制方程就是:

$$\left.\begin{aligned} U_1(s) &= C_{11}(s)[X_1(s) - L_{11}(s)Y_1(s)] + C_{12}(s)[X_2(s) - L_{22}(s)Y_2(s)] \\ &\quad + C'_{13}(s)[\Xi_3(s) - L_{33}(s)W_3(s)], \\ U_2(s) &= C_{21}(s)[X_1(s) - L_{11}(s)Y_1(s)] + C_{22}(s)[X_2(s) - L_{22}(s)Y_2(s)] \\ &\quad + C'_{23}(s)[\Xi_3(s) - L_{33}(s)W_3(s)], \\ U_3(s) &= C_{31}(s)[X_1(s) - L_{11}(s)Y_1(s)] + C_{32}(s)[X_2(s) - L_{22}(s)Y_2(s)] \\ &\quad + C'_{33}(s)[\Xi_3(s) - L_{33}(s)W_3(s)], \end{aligned}\right\} \tag{5.45}$$

這裏的 $X_1(s)$, $X_2(s)$ 和 $\Xi_3(s)$ 分別是發動機轉速, 渦輪進口溫度和尾噴管噴油速率的控制信號.

方程(5.14)的不互相影響條件要求

$$C_{31}(s) = C_{32}(s) = 0. \tag{5.46}$$

方程(5.19)的條件給出:

$$\left.\begin{aligned} \frac{S_{11}(s)C_{12}(s)}{S_{22}(s)C_{22}(s)} &= -\frac{a_2}{a_1}, \\ \frac{S_{22}(s)C_{21}(s)}{S_{11}(s)C_{11}(s)} &= \frac{a_1 e}{(c - a_2 e) + c\tau s}. \end{aligned}\right\} \tag{5.47}$$

方程(5.24)的不互相影響條件給出

$$\frac{S_{11}(s)C'_{13}(s)}{S_{33}(s)C'_{33}(s)} = -\frac{a_3}{a_1}$$

和

$$C'_{23}(s) = 0. \tag{5.48}$$

以上這些方程裏的比值 $-a_2/a_1$ 和 $-a_3/a_1$ 都有很簡單的物理意義: 當發動機轉速和尾噴管噴油速率都是常數的時候, 尾噴管的開口面積對於燃燒室噴油速率的變化率就是 $-a_2/a_1$. 當發動機轉速和燃燒室噴油速率都是常數的時候, 尾噴管的開口面積對於尾噴管噴油速率的變化率就是 $-a_3/a_1$.

如果方程(5.46), (5.47)和(5.48)都被滿足了, 我們就得到不互相影響的控制. 這時, 對於發動機轉速的反應函數就是

$$R_{11}(s) = \frac{S_{11}(s)C_{11}(s)}{S_{11}(s)C_{11}(s)L_{11}(s) + \dfrac{(c - a_2 e) + c\tau s}{a_1 c}}. \tag{5.49}$$

對於渦輪進口溫度的反應函數就是

$$R_{22}(s) = \frac{S_{22}(s)C_{22}(s)}{S_{22}(s)C_{22}(s)L_{22}(s) + (1/c)}. \tag{5.50}$$

對於尾噴管噴油速率的反應函數就是

$$R'_{33}(s) = \frac{S_{33}(s)C'_{33}(s)}{S_{33}(s)C'_{33}(s)L_{33}(s) + 1}. \tag{5.51}$$

根據以上這些方程就可以適當地設計控制傳遞函數 $C_{11}(s)$, $C_{22}(s)$, $C'_{33}(s)$, 因而也就可以確定 $C_{12}(s)$, $C_{21}(s)$ 和 $C'_{13}(s)$.

# 第 六 章

# 交流伺服系統與振盪控制伺服系統

在第二章和第三章裏我們曾經討論了關於普通的伺服系統的概念和方法，在這一章和以後的兩章裏，我們要把這些概念和方法推廣到一些更複雜的綫性系統上去，這些系統雖然比較複雜，可是它們都還是可以用以前的辦法進行相當"近似"的處理．這個情况也就可以說明伺服系統的基本設計原則有很大的用處．這一章和下一章的內容基本上就是麥克柯爾(L. A. MacColl)在他的書[1]裏所提出的方法．

## 6.1 交流系統

在以前各章的討論中，凡是伺服系統中的電動機都假定是直流電動機．但是，在實際工程中希望用的還是交流電動機．因此，很明顯，當我們在伺服系統中應用交流電動機的時候就必須把以前的討論中的某些部分加以重新考慮．

現在我們來考慮圖 6.1 所畫的伺服系統．這個系統的設計目的就是要求電動機的轉角 $\phi$ 隨着輸入信號變化．系統的輸出角度 $\phi$ 是用一個電位計來測量的．電位計上的電壓就是反饋信號．在這個系統的電動機，放大器以及電位計上的電流和電壓都是已調幅的正弦波，也就是說，它們都是頻率不變而振幅隨時間變化的正弦函數．假定它們的頻率是 $\omega_0$．基本的交流電流是由振盪器所供給的．這就是交流伺服系統的一個例子．在一定的條件之下．(下面我們就要討論到這些條件)，以前的理論中有很大一部分也可以應用到這種系統上來．

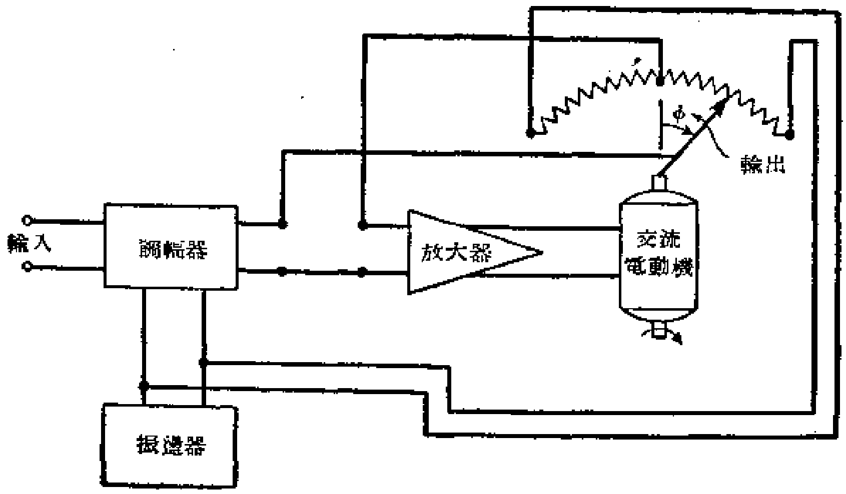



圖 6.1

1) L. A. MacColl, "Fundamental Theory of Servomechanisms", D. Van Nostrand Company, Inc., New York, (1945) (俄文譯本[34]).

我們先來考慮常系數綫性系統在已調幅的正弦式的輸入信號作用下的一般的穩態理論. 這裏所說的"穩態"是對於調幅信號是單純的正弦式時間函數的情況而言的. 假設未調幅的載波是 $\cos\omega_0 t$. 在這裏我們雖然把載波的相角取作零,但是並不影響討論的普遍性. 既然已經把載波寫成實數形式, 爲了方便起見顯然應該把調幅信號寫成複數形式 $e^{i\omega t}$. 這時已調幅的載波就是

$$x(t) = e^{i\omega t}\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left[e^{i(\omega+\omega_0)t} + e^{i(\omega-\omega_0)t}\right], \tag{6.1}$$

如果系統的傳遞函數是 $F(s)$,按照方程(2.16)系統的穩態輸出 $[y(t)]_{st.}$ 就應該是

$$[y(t)]_{st.} = \frac{1}{2}[F(i\omega + i\omega_0)e^{i\omega_0 t} + F(i\omega - i\omega_0)e^{-i\omega_0 t}]e^{i\omega t}. \tag{6.2}$$

對於實際的系統來說,函數 $F(s)$ 通常是 $s$ 的兩個實係數多項式的比值. 所以,正如方程(3.17)所表示的那樣

$$F(-i\omega) = \overline{F(i\omega)}, \tag{6.3}$$

這裏,用符號上面的橫綫表示複共軛值. 因此,方程(6.2)的右端就可以寫作

$$\frac{1}{2}[F^*(i\omega)e^{i\omega_0 t} + \overline{F^*(-i\omega)}e^{-i\omega_0 t}]\,e^{i\omega t}, \tag{6.4}$$

其中

$$F^*(i\omega) = F(i\omega + i\omega_0). \tag{6.5}$$

現在我們假設系統具有以下的性質:

$$F(i\omega_0 + i\omega) = \overline{F(i\omega_0 - i\omega)}. \tag{6.6}$$

這時,表示式(6.4)就可以寫成下列形狀:

$$F^*(i\omega)e^{i\omega t}\cos\omega_0 t.$$

這個結果表明; 如果另外有一個對於頻率是 $\omega$ 的輸入,頻率特性是 $F^*(i\omega)$ 的系統, 當條件(6.6)被滿足時,原來系統對於已調幅的載波(6.1)的振幅的頻率特性 $F^*(i\omega)$ 與那個系統的頻率特性是完全相同的. 利用綫性系統的可疊加性,可以把以上的討論結果推廣到更一般的輸入函數上去, 因爲很多種輸入函數都可以用富利埃級數或富利埃積分表示出來,如果在輸入調幅信號 $x(t)$ 的富利埃譜的最重要的部分上,方程(6.6)至少都能近似地成立,那末,已調幅的輸出信號的振幅對於輸入信號而言的頻率特性差不多就是 $F^*(i\omega)$. 在第四章中我們曾經證明,反饋伺服系統的性能可以完全由頻率特性所決定,既然現在頻率特性的近似值是 $F^*(i\omega)$, 所以, 第四章中所有確定系統性能的方法完全可以應用到交流系統上來,唯一的區別只是在進行分析時把 $F(i\omega)$ 用 $F^*(i\omega) = F(i\omega + i\omega_0)$ 來代替.

## 6.2 把直流系統變爲交流系統時傳遞函數的變化方法

如果我們不考慮某些過於簡單的情形(例如,單純的電阻),那末,根據方程(6.3)就有

$$F(i\omega + i\omega_0) = \overline{F(-i\omega - i\omega_0)}.$$

這個關係和條件(6.6)是不同的, 所以, 不可能對於所有的實 $\omega$ 值都能精確地滿足條件(6.6). 或者,稍微改變一下我們的看法,可以這樣說,如果兩個物理系統的頻率特性分別是 $F^*(i\omega)$ 和 $F(i\omega)$,那末,關係(6.5)不可能對於所有實 $\omega$ 值都嚴格地被滿足. 但是, 對於特定的輸入信號而言,在它的富利埃譜的主要部分上, 完全可能有, 而確實也往往有一個足够大的 $\omega$ 的範圍,在這個範圍之內, 條件(6.5)可以近似地被滿足. 在以下的討論中

我們就會看到這種情況.

我們考慮一個頻率是 $\omega'$ 時由電感 $L$ 與電容 $C$ 串聯起來的阻抗 $Z$,

$$Z = Li\omega' + \frac{1}{Ci\omega'}$$
$$= Li\omega'\left(1 - \frac{1}{LC\omega'^2}\right).$$

如果我們使 $L$ 和 $C$ 的大小滿足下列條件

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \tag{6.7}$$

那末

$$Z = Li\omega'\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega'^2}\right) = Li(\omega' - \omega_0)\left(1 + \frac{\omega_0}{\omega'}\right).$$

如果 $\omega' - \omega_0 = \omega$ 相當小,或者說 $\omega + \omega_0$ 與 $\omega_0$ 相當接近,就有

$$Z \approx 2Li\,(\omega' - \omega_0) = 2Li\omega.$$

這個關係表明:當頻率是 $\omega' = \omega_0 + \omega$ 時,滿足方程(6.7)的電感 $L$ 與電容 $C$ 的串聯組合的阻抗差不多就等於電感 $2L$ 在頻率是 $\omega$ 時的阻抗.

類似地,如果滿足條件(6.7),電感 $L$ 與電容 $C$ 的並聯組合的阻抗 $Z$ 也就滿足下列關係:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Li\omega'} + Ci\omega$$
$$\approx 2Ci\,(\omega' - \omega_0) = 2Ci\omega,$$

因此,在頻率是 $\omega' = \omega + \omega_0$ 時,$L$ 與 $C$ 的並聯組合的阻抗差不多就等於電容 $2C$ 在頻率是 $\omega$ 時的阻抗.

一個單純電阻的阻抗當然是與頻率沒有關係的,所以它在頻率是 $\omega + \omega_0$ 時的阻抗和它在頻率是 $\omega$ 時的阻抗是相等的. 因此,如果已經有了一個由電感,電容和電阻組成的物理系統,這個系統的傳遞函數是 $F^*(s)$. 我們把這個系統裏的每一個電感 $L$ 都用電感 $L_1 = \frac{1}{2}L$ 與電容 $C_1 = 2/L\omega_0^2$ 的串聯組合來代替; 把系統中的每一個電容 $C$ 都用電容 $C_2 = \frac{1}{2}C$ 和電感 $L_2 = 2/C\omega_0^2$ 的並聯組合來代替;所有電阻都不予變動;這樣一來,我們就得到一個新的系統,這個系統的傳遞函數就是 $F(s)$, 只要 $\omega$ 值足够小, 方程(6.6)的關係就可以近似地滿足. 以上所講的由 $F^*(s)$ 變到 $F(s)$ 的作法就稱為把傳遞函數提高一個頻率 $\omega_0$.

如果 $\omega_0$ 是振盪器所供給的電流的頻率, 很顯然, 系統中各個電流和各個電壓都是載波 $\cos \omega_0 t$ 的已調幅波. 因此,根據以上的結果立刻就得出下列的方法:如果我們想為一個交流系統設計一個放大器, 我們只要按照第四章的方法先為一個直流系統設計一個合適的放大器,然後再按照上述的方法把系統提高一個頻率 $\omega_0$ 就可以了.

正如我們所提到的那樣,以上的討論中用到不少各種各樣的近似方法,所以得到的結果也不是絕對精確的. 如果想對於交流伺服系統作一個詳盡嚴密的討論,就必須把這些

近似方法所引起的效果加以嚴密的分析. 我們不來研究這個問題,因爲這個問題的分析相當複雜繁重,而且對於伺服控制技術來說,這也不是一個很迫切需要解決的問題.

### 6.3 振盪控制伺服系統

現在我們來考慮另外一類系統,這類系統就是振盪控制伺服系統. 與有交流電動機的交流伺服系統相似,振盪控制伺服系統的信號也是用來調制一個周期振盪的. 不過,在振盪控制伺服系統中,信號調制的方法不再是普通的調幅方法. 爲了能够簡單明瞭地介紹振盪控制伺服系統的概念,我們必須先提出一些預備知識.

我們來介紹一種很原始的但是也很普通的伺服系統. 假如我們在系統裏加一個包含一個繼電器的電路,而且這個繼電器的特性是這樣的:如果輸入電壓 $x(t)$ 的絕對値不超過一個一定的閾限(也就是一個一定的常數)的話,輸出端就沒有電壓,如果輸入電壓 $x(t)$ 的絕對値 $|x(t)|$ 超過那個閾限的話,輸出就是一個常數電動勢 $E$. 這個電動勢是由一個電源所供給的,這個電動勢的極性決定於偏差信號的符號,它總是傾向於使偏差信號的絕對値逐漸減少. 這就是所謂開關伺服系統(也就是包含有繼電器的伺服系統)的一個例子.

開關伺服系統有一個很大的優點:我們可以用相當簡單的開關系統來操縱相當大的功率. 這個優點對於其他類型的伺服系統來說往往是很難作到的. 但是,從另外一方面來說,開關伺服系統當然是一個非綫性系統,並且在第十章的討論中我們還要看到,它們的運轉性能也不如以前討論過的各種系統好. 簡言之,振盪控制伺服系統是開關伺服系統的一種變形,它保持了綫性性質的優點可是還能够操縱相當大的功率.

在進行討論振盪控制伺服系統之前,我們先提出一個理論的結果,所有這一類系統的理論都是以這個結果爲基礎的. 讓我們考慮一個具有下列性質的裝置:如果輸入 $x(t)$ 是正數,輸出就是 $+A$,如果輸入 $x(t)$ 是負數,輸出就是 $-A$. $A$ 是一個固定的常數. 我們可以把這樣一個裝置想像爲一個理想的繼電器(一個閾限是零的開關伺服系統). 假定繼電器的輸入信號是

$$x(t) = E_0 \sin \omega_0 t + kE_0 \sin \omega t, \tag{6.8}$$

這裏 $E_0$, $k$, $\omega_0$ 和 $\omega$ 都是常數. 在振盪控制伺服系統的情形中, $E_0 \sin \omega_0 t$ 是系統中的持續振盪, $kE_0 \sin \omega t$ 是所用的信號,也就是調制信號. 現在我們來計算相應的輸出 $y(t)$.

### 6.4 繼電器的頻率特性

如果輸入是由方程(6.8)所表示的,那末,繼電器的輸出就可以寫成下列形狀:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nm} \sin [(m\omega_0 + n\omega)t], \tag{6.9}$$

這裏的各個系數 $a$ 都是與 $t$ 無關的常數. 當 $m = 0$ 時, 內部的求和只對於正的 $n$ 值進行. 爲了我們預定的目的,最有興趣的系數就是 $a_{10}$ 和 $a_{01}$, 因爲振盪控制伺服系統在正規的運轉狀態之下,其他的系數或者是非常小,或者由於適當的濾波手續而被過濾掉.

當 $k = 0$ 時, 也就是當繼電器的輸入是一個頻率是 $\omega_0$ 的單純的正弦函數時, 繼電器的輸出就是正負交替的矩形波, 這個矩形波的高度是 $A$ 而每一個矩形的長度都是 $\pi/\omega_0$.

我們已經知道這樣一個矩形波的富利埃展開式的第一項的系數等於

$$a_{01}=\frac{4A}{\pi}. \tag{6.10}$$

當 $k\neq 0$ 時，繼電器的輸出就是圖 6.2 所表示的樣子。$k\neq 0$ 時的輸出與 $k=0$ 時的輸出的差別就是一系列高度是 $2A$ 的矩形，在圖 6.2 裏我們用陰影的區域表示這些矩形。當 $|k|\ll 1$ 時，開關點（也就是輸出變換符號的時刻）與均勻分佈的各點 $t_n=n\pi/\omega_0$ 之間的差別是十分微小的。因此，正如圖中所表示的樣子，表示輸出信號的修正量的那些矩形也是很狹窄的。這些矩形的寬度可以這樣近似地計算：在 $t_n$ 處的矩形的寬度等於調制信號在 $t_n$ 處的值被持續振盪在 $t_n$ 處的斜率除得的商數。因此，這個寬度就是

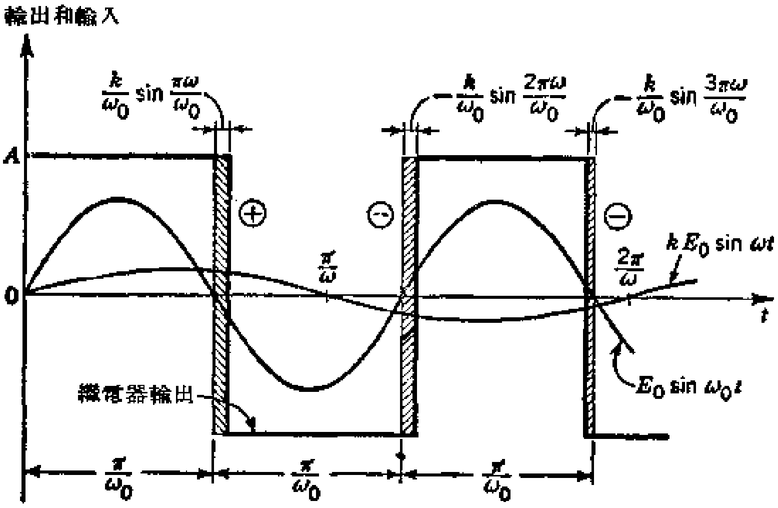



圖 6.2

$$\left|\frac{kE_0\sin\omega t_n}{E_0\omega_0\cos\ \omega_0 t_n}\right|=\frac{k}{\omega_0}\,|\sin\omega t_n|$$

如果 $\sin\omega t_n$ 是正數就要把矩形加到（+）未調制的輸出上去，如果 $\sin\omega t_n$ 是負數就要把矩形從未調制的輸出上減去（−）。所以矩形的面積可以看作是

$$\frac{2Ak}{\omega_0}\sin\omega\, t_n.$$

方程(6.9)裏的系數 $a_{10}$ 就是這一系列狹窄矩形波的富利埃展開式中的第一項 $\sin\omega t$ 的系數。因為 $\sin\omega t$ 在矩形區域中的值是 $\sin\omega t_n$，所以，如果取 $N$ 個這類的"改正矩形"就有

$$a_{10}\int_0^{N\pi/\omega_0}\sin^2\omega t\,dt=2A\frac{k}{\omega_0}\sum_{n=0}^{N}\sin^2\omega t_n.$$

但是

$$\int_0^{N\pi/\omega_0}\sin^2\omega t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{N\pi/\omega_0}(1-\cos 2\omega t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\frac{N\pi}{\omega_0}-\frac{1}{4\omega}\sin\left(2N\pi\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

而

$$\sum_{n=0}^{N}\sin^2\omega t_n=\sum_{n=1}^{N}\sin^2\left(n\pi\frac{\omega}{\omega_0}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left[1-\cos\left(2n\pi\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$$
$$=\frac{N}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\cos\left(2n\pi\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

當我們把 $N$ 無限增大時，這個公式中的和數仍然保持有限，所以，讓 $N$ 很大，我們就有

$$a_{10} = 2\frac{Ak}{\pi}. \tag{6.11}$$

方程(6.10)和(6.11)對於 $k$ 很小的情況給出了兩個重要的系數 $a_{01}$ 與 $a_{10}$. 對於一般的 $k$ 值，卡爾普(R. M. Kalb)和本尼特(W. R. Bennett)[1]曾經計算了這兩個系數. 當 $0 < k < 1$ 時，

$$\left.\begin{aligned} a_{01} &= \frac{8A}{\pi^2}E(k), \\ a_{10} &= \frac{8A}{\pi^2 k}[E(k) - (1-k^2)K(k)], \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

這裏 $K(k)$ 和 $E(k)$ 分別表示第一類與第二類的完全橢圓積分. 如果 $k$ 相當小，橢圓積分是可以展開的，這時就有

$$\left.\begin{aligned} a_{01} &= \frac{4A}{\pi}\left(1 - \frac{k^2}{4} - \cdots\right), \\ a_{10} &= \frac{2Ak}{\pi}\left(1 + \frac{k^2}{8} + \cdots\right). \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

方程(6.13)表明，我們原來的簡單計算方法在分析的準確度上是相當正確的. 然而它也表明方程(6.10)與(6.11)所給的簡單結果對於不是很小的 $k$ 值也還能適用，因為(6.13)與(6.10)(6.11)的差別的數量級是 $k^2$. 因此，輸出中頻率是 $\omega$ 的成分與輸入中同樣頻率的成分的比，也就是頻率特性 $F_l(i\omega)$ 近似地等於

$$F_l(i\omega) = \frac{2A}{\pi E_0}. \tag{6.14}$$

正如方程(6.10)與(6.13)所表明的情況，當 $k$ 相當小的時候，輸出中頻率是 $\omega_0$ 的成分的振幅差不多是一個常數，而這個常數是由繼電器本身的特性所完全確定的. 而且，輸出中頻率是 $\omega_0$ 的成分與輸入中同頻率的成分的比是 $4A/\pi E_0$. 所以，繼電器對於頻率是 $\omega_0$ 的成分的放大率比對於頻率是 $\omega$ 的成分的放大率多 6 分貝(db).

不難看出，以上的討論可以推廣到這樣的情形中去：輸出不是 $kE_0 \sin \omega t$ 而是 $x(t)$，$x(t)$ 是任意形狀的函數而且 $x(t)$ 的大小比持續振盪的振幅 $E_0$ 小得多. 在這種情形下，主要的結果可以這樣表述：如果調制信號中的高次項小到可以忽略不計的程度或者可以用適當的濾波的方法把它們最後過濾掉；如果繼電器的輸入是

$$E_0 \sin \omega_0 t + x(t),$$

而 $x(t)$ 比 $E_0$ 小得多，那末，對於信號 $x(t)$ 的傳遞來說，繼電器的性質就與一個綫性系統一樣，這時的頻率特性就是方程(6.14)所表示的常數.

### 6.5 利用固有振盪的振盪控制伺服系統

現在我們來進一步討論振盪控制伺服系統. 我們已經看到，如果只從信號的傳遞作用的角度來考慮問題，持續振盪的作用只是使繼電器變成一個具有正實數頻率特性的相當近似的綫性元件. 因此，從一開始我們就可以不必提到持續振盪 $E_0 \sin \omega_0 t$ 而把繼電器

1) *Bell System Tech. J.*, **14**, 322—359 (1935).

看作是一個綫性元件[1]，因而也就可以利用以前各章的各種概念和方法來處理這種系統．這個很巧妙的新方法是羅吉埃(J. C. Lozier)所提出的．

爲了簡單起見，我們一直假定伺服系統本身就具有濾波的性質，能够把繼電器所產生的所有的不需要的調制項過濾掉．其實，我們還是可以想到，在實際情形中爲了達到濾波的目的，有時候也還需要附加一些濾波器．自然，不論系統中的濾波器是怎樣的，它們都必須能够使有用的信號通過．把這一點和其他方面的考慮聯系起來就得到這樣的結論：頻率 $\omega_0$ 必須大於信號的富利埃譜的主要部分的頻率．

不論在系統採用那一種濾波的方法，輸出中總是包含一個頻率是 $\omega_0$ 的振盪成分．特別應該注意：如果用濾波的方法把這個振盪成分的振幅減低到一定的數值以下，後果反而不好．因爲在事實上這個振盪能够起"動力滑潤"的作用，它能够減少靜力摩擦、鬆弛以及其他各種與系統有關的非綫性作用的影響，而這些作用都是使伺服系統的運轉性能變壞的．

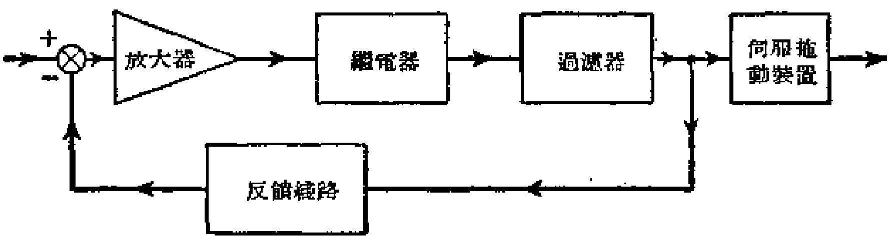



圖 6.3

我們一直還沒有特別討論用什麼方法把持續振盪 $E_0 \sin \omega_0 t$ 加到繼電器上去的問題，我們僅只附帶地提到過，可以用一個附加的振盪器來供給這個振盪．用振盪器供給持續振盪的系統在可變化性方面是有優點的，因爲持續振盪的振幅 $E_0$ 與頻率 $\omega_0$ 都不難加以改變；可是這種系統總是需要一定數量的額外的設備，這是它們的一個重大缺點．以下我們將要簡單地介紹一類振盪控制伺服系統，這類伺服系統本身就能够供給持續振盪而不需要額外的設備．

我們來看圖 6.3 所表示的系統．假定這個系統被設計得具有這樣的性能：當沒有輸入信號時系統也能以某一個固定的頻率 $\omega_0$ 振盪，這個 $\omega_0$ 的値是由反饋迴路中的綫性元件的頻率特性的相角偏移所確定的．正如我們已經看到的，對於持續振盪而言，繼電器所起的作用就像一個綫性元件一樣，而且頻率特性 $4A/(\pi E_0)$ 是一個與振幅成反比的正實數．正因爲如此，振盪的振幅也能自行調整，使得由於迴路中的繼電器和綫性元件而產生的放大率最後變爲一．

現在假定有一個信號加在系統上．如果在繼電器的輸入部分上相應的偏差信號相當小，那末，繼電器對於持續振盪的放大率基本上就不受到影響，因而還可以以原有的頻率和振幅繼續振盪．我們已經證明，繼電器對於信號所起的作用也是綫性的，繼電器對於信號的放大比對於持續振盪的放大小 6 個分貝．很明顯，在這種情況下，我們就得到一種振盪控制伺服系統．這種系統基本上與以前所討論過的那種系統是相同的，唯一的區別在

1）藉助於強振盪使非綫性系統綫性化的數學根據可以參閱[35—37]．

於：這種系統的持續振盪 $E_0 \sin \omega_0 t$ 的頻率和振幅都是由系統本身所確定的（這種振盪稱爲固有振盪），然而在以前的那種情形中我們實際上假設持續振盪是與系統無關的[1]。

如果把系統當作一個伺服系統來考慮，那末，在所有的討論裏我們只需要考慮繼電器對於信號的頻率特性，也可以按照以前各章所提出的方法進行處理．並不需要顧慮持續振盪．但是，因爲要維持系統的持續振盪，所以，從伺服系統的角度來說，性能的改善還是受到一定的限制的．在以下的討論裏就可以看到這一點．

假設 $F(s)$ 是控制線路對於信號而言的傳遞函數，這個函數是按照方程(6.14)計算的．對於持續振盪而言的傳遞函數當然就是 $2F(s)$．既然系統有持續振盪，所以系統的傳遞函數 $1+[1/2F(s)]$ 有一個純虛數零點 $s=i\omega_0$．所以

$$2F(i\omega_0) = -1.$$

因此，當 $s$ 沿着虛軸變化時，乃氏圖的 $1/F(s)$ 圖綫必須經過 $-2$ 點．另一方面，當我們把系統看作伺服系統時，爲了保證它具有滿意的性能，$1/F(s)$ 圖綫就必須滿足第四章所討論過的那些條件，包括必須離開 $-1$ 點相當遠的條件在內；很明顯，由於多了一個限制條件，就使得系統比沒有這個限制條件的系統更難滿足這些條件．在這個意義上，從可變化性的角度來看，這一類利用本身的固有振盪的系統是不如那些利用外加的振盪器供給持續振盪的振盪控制伺服系統的．所以，當系統能進行持續振盪時，$1/F(i\omega_0)$ 圖綫必須經過 $-2$ 點．爲了避免圖綫經過 $-1$ 點的附近，可以採取這樣一個辦法：設法使圖綫在 $-2$ 點與實軸垂直地相交．這也就表示，在系統的固有頻率 $\omega_0$ 處，向量 $1/F(i\omega)$ 的長度變化得非常緩慢，而相角變化得比較快．

### 6.6 一般的振盪控制伺服系統

繼電器是非綫性裝置．但是如果把一個高頻率大振幅的正弦振盪加到信號上去，那末，對於信號而言，就可以使得輸出與輸入之間的關係變成綫性的．所以，振盪控制伺服系統的基本概念就是把非綫性系統綫性化．羅埃布(J. M. Loeb)[2]已經證明：這個概念可以應用到任何非綫性系統上去，並且他把這個方法稱爲**非綫性控制系統的一般綫性化方法**．因此，我們也就把利用這種方法的伺服系統稱爲**一般的振盪控制伺服系統**．

我們來考慮一個一般的函數 $y(x)$，這裏的 $y$ 是輸出，$x$ 是輸入．如果把變數 $x$ 換成 $x+\varepsilon$，而 $\varepsilon$ 是一個比 $x$ 小得多的數．如果 $y(x)$ 是一個正則函數，我們就可以把 $y(x+\varepsilon)$ 展開爲泰勒(Taylor)級數：

$$y(x+\varepsilon) = y(x) + \varepsilon\left(\frac{dy}{dx}\right)_x + \varepsilon^2 \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_x + \cdots. \qquad (6.15)$$

現在我們假定輸入 $x$ 是一個時間 $t$ 的周期函數，周期是 $T$，並且 $\varepsilon$ 是一個常數．顯然，$y(x)$ 也是時間 $t$ 的周期函數，周期也還是 $T$．不難想到，$dy/dx$ 與 $d^2y/dx^2$ 也是時間 $t$ 的周期函數，而且周期也是 $T$．周期函數可以展開爲富利埃級數，所以，如果把 $\varepsilon$ 的高於一次的方冪忽略不計，我們就得到

1) 這是自持振盪系統的主要特性，由於系統本身繼電器使得存在自持振盪，參閱[1, 6, 13, 38, 39]．

2) J. M. Loeb, *Ann. de Télécommunications*, **5**, 65—71 (1950).

$$y(x+\varepsilon) \approx a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{0n}\cos n\omega t + b_{0n}\sin n\omega t)$$
$$+ \varepsilon\left[a_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{1n}\cos n\omega t + b_{1n}\sin n\omega t)\right], \qquad (6.16)$$

其中 $\omega = 2\pi/T$ 是輸入 $x$ 的頻率.

如果 $\varepsilon$ 不是一個眞正的常數,而是一個變化得相當緩慢的時間函數,它的基本頻率比 $\omega$ 小得很多. 這時,方程(6.16)仍然近似地正確. 現在把 $y(x)$ 看作是非綫性裝置的輸入與輸出之間的關係,把 $\varepsilon(t)$ 看作是信號, 把 $x(t)$ 看作是附加上去的高頻率大振幅的持續振盪,這個持續振盪不必須是正弦振盪. 在非綫性元件的輸出中表示信號的是方程(6.16)的第二項. 既然頻率 $\omega$ 比 $\varepsilon(t)$ 的頻率高得多. 所以,我們就可以把下列富利埃級數所表示的周期函數看作是載波,

$$a_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{1n}\cos n\omega t + b_{1n}\sin n\omega t),$$

把 $\varepsilon(t)$ 看作是調幅信號. 在以上的討論中,我們都是假定非綫性元件的輸入 $x$ 與輸出 $y$ 之間有直接的函數關係 $y(x)$. 羅埃布(J. M. Loeb)曾經證明: 即使 $y$ 與 $x$ 之間的關係是一般的泛函數關係(也就是說, $y$ 在時刻 $t$ 的值不僅僅與 $x$ 在時刻 $t$ 的瞬時值有關, 而且也與在所有過去的時刻的 $x$ 值有關),方程(6.16)也還是成立的. 這種更廣泛的輸入輸出關係的概念就可以把例如齒輪鬆弛等等的滯後現象包括在內, 而且這種概念幾乎對於所有的實際的非綫性裝置都能適用. 因此,對於一般的振盪控制伺服系統來說,輸出中的信號的形式是被調制的載波,而且對於信號而言,輸入輸出之間的關係是綫性的.

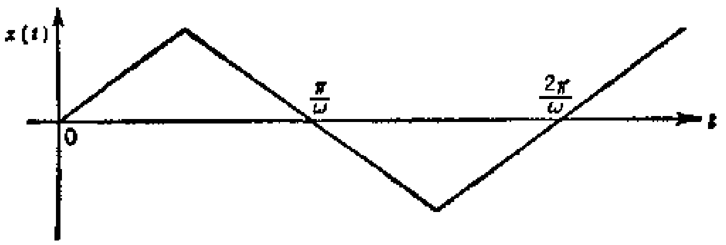



圖 6.4

現在,我們假定附加的持續振盪的波形是對稱的, 例如正弦波或圖 6.4 所表示的鋸齒波等等. 如果 $y(x)$ 是偶函數,或者說

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= y(-x), \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_x &= -\left(\frac{dy}{dx}\right)_{-x}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.17)$$

那末,對於周期函數 $y(x)$ 與 $dy/dx$ 就有下列關係:

$$\left.\begin{aligned} y(x)_t &= y(x)_{t+\frac{T}{2}}, \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_t &= -\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t+\frac{T}{2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.18)$$

從這兩個條件就推導出

$$a_{01}=b_{01}=0,\quad a_{10}=0\quad(y(x)\text{ 是偶函數時}).\tag{6.19}$$

因此,如果把高次諧波忽略不計,載波就是一個頻率是 $\omega$ 的正弦振盪. 這也就是前一節所討論過的交流伺服系統的情形. 在那裏所提出的設計方法仍然可以用到這類一般的振盪控制伺服系統上來. 如果 $y(x)$ 是奇函數,或者說 $y(x)=-y(-x)$,我們也還可以寫出一組類似於方程(6.17)和(6.18)的條件,而且可以導出下列條件:

$$a_{00}=0,\quad a_{11}=b_{11}=0\quad(y(x)\text{ 是奇函數時}).\tag{6.20}$$

如果忽略掉高次諧波,這個情形與第 6.4 節所討論過的振盪控制伺服系統是完全相同的.

以上的討論表明:如果伺服系統中包含有非綫性元件,我們就可以用在輸入信號上附加持續振盪的方法使非綫性元件的特性綫性化,同時把原來的系統變爲性能較好的振盪控制伺服系統. 而且,完全可以用這一章所講的各種方法來設計這一類伺服系統.

# 第 七 章

# 採 樣 伺 服 系 統

直到現在爲止，在我們所討論的各種伺服系統中，被處理的信號都是連續的時間變數 $t$ 的函數. 可是，實際上會碰到這種情況：伺服系統所需要處理的信號是以離散變數的函數所給定的. 舉例來說，一個輸入信號只是由某一個函數 $x(t)$ 在間隔相等的各個時刻 $0, t_0, 2t_0, \cdots$ 的值所確定，而在這些所謂採樣時刻之間的時間間隔中，輸入是沒有被確定的. 這就是信號是離散變數的一種情況.

如果遇到剛才所講的那種情形，我們自然對在各個採樣時刻的輸出信號的值發生興趣. 同時也希望伺服系統具有這樣一種性質：伺服系統只根據這些輸出值對輸出信號進行改正作用，在採樣間隔之內的輸出值並不影響改正作用. 如果一個伺服系統具有這種性質，我們就把它叫作採樣伺服系統. 在這一章裏，我們將要簡單地講一講綫性採樣伺服系統的理論，我們所要採取的觀點和作法與以前各章關於連續作用的伺服系統的討論是十分相像的.

## 7.1 一個採樣綫路的輸出

圖 7.1 所畫的是我們將要討論的採樣伺服系統的簡圖. 這個系統也包含有普通的前向控制綫路和反饋綫路，這個系統的主要不同之點是在反饋綫路上有一個作周期性運動的開關，這個開關只在等間隔的各個採樣時刻 $0, t_0, 2t_0, \cdots$ 上閉合很短的時間，在其餘時間這個開關總是開斷的. 如果在系統中還包含有能够儲藏能量的元件或者具有頻率選擇性的元件，那末，理論的敍述只在細節上有所不同，而沒有根本的改變. 旣然如此，我們就可以假定前向控制綫路的傳遞函數與頻率無關，因而使得敍述可以簡單一些. 至於前向綫路是一個 $s$ 的有理分式的情形，也可以類似地加以處理，齊普金[41](Я. З. Цыпкин)以及拉格基尼(J. R. Ragazzini)和紮第[1] (L. A. Zadeh) 曾經在這方面進行過較詳細的分析. 開關被安裝在圖 7.1 所表示的部位上也是一件很有影響的事實.

以下的分析都是根據這樣一個假設的：開關閉合的時間非常短，以至於我們可以認爲反饋綫路所受到的是一系列的冲量. 我們還假定：反饋綫路對於單位冲量的反應 $h_2(t)$ 是時間的連續函數，這也就是說，對於小的 $t$ 值，$h_2(t)$ 的變化情

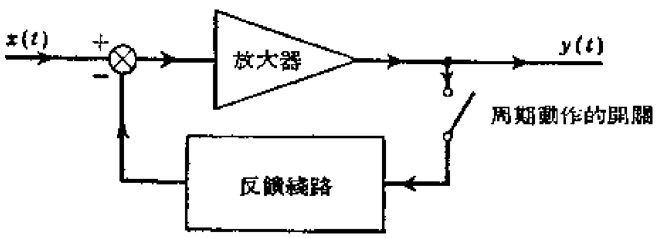



圖 7.1

---

1) J. R. Ragazzini and L. A. Zadeh. *Trans. AIEE*, 71, Part II, p. 228, (1952).

況與 $t^n$ 的變化情況是相像的．這裏 $n \geqslant 1$．這時 $h_2(t)$ 在 $t=0$ 處沒有跳躍．如果反饋綫路的傳遞函數是 $F_2(s)$，根據一般的公式，方程(2.18)，

$$h_2(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_2(s)e^{st}ds, \tag{7.1}$$

這裏，$\gamma$ 是一個比 $F_2(s)$ 的所有極點的實數部分都大的一個實常數．如果對於很大的 $s$ 值，$F_2(s)$ 的變化情況與 $1/s^m$ 的變化情況相像，按照拉氏變換表（表 2.1），對於很小的 $t$ 值，$h_2(t)$ 的變化情況與 $t^{m-1}$ 的變化情況相像．我們所假設的 $h_2(t)$ 在 $t=0$ 處的連續條件，要求 $m$ 至少要等於 2．所以，對於趨近於無限大的 $s$ 值來說，$F_2(s)$ 趨近於零的速度至少要和 $1/s^2$ 趨近於零的速度一樣快．

這樣一來就很清楚了，如果在 $t<0$ 時，輸入信號 $x(t)$ 恆等於零，那末，在一個一般的採樣時刻 $nt_0$ 時，輸出信號的值 $y(nt_0)$ 就是以以前所有的冲量的影響和總和來計算的，它可以用下列公式給出：

$$y(nt_0) = F_1\left[x(nt_0) - \theta t_0 \sum_{k=0}^{n} y(kt_0)h_2(nt_0 - kt_0)\right], \tag{7.2}$$

這裏的 $F_1$ 表示前向控制綫路的傳遞函數（也就是放大器的放大），它是一個常數．$\theta$ 表示開關每一次閉合的時間與**採樣周期** $t_0$ 的比值，$\theta<1$．因此，$\theta t_0 y(kt_0)$ 是在 $t=kt_0$ 時反饋綫路的輸入冲量．

如果在各個採樣時刻 $x(t)$ 與 $h_2(t)$ 的值都是已知的，我們就可以根據公式(7.2)用初等方法把 $y(0)$, $y(t_0)$, $y(2t_0)$, … 依次計算出來；但是，我們所要採用的不是這種方法，而是另外一種更清楚的計算方法，利用這個新方法我們就能够把採樣伺服系統的理論化為與第四章所討論的普通的伺服系統的理論相似的形式．這個方法是施梯必茨（G. R. Stibitz）與申南（C. E. Shannon）創始的．

## 7.2 施梯必茨-申南(Stibitz-Shannon)理論

我們先來規定下列三個函數：

$$X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nt_0)e^{-nt_0 s}, \tag{7.3}$$

$$Y^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nt_0)e^{-nt_0 s}, \tag{7.4}$$

$$F_2^*(s) = t_0 \sum_{n=0}^{\infty} h_2(nt_0)e^{-nt_0 s}. \tag{7.5}$$

這些函數都是 $s$ 的周期函數，它們的周期都是虛數 $2\pi i/t_0$．在以上三個公式中，$nt_0$ 的函數就是富利埃系數．從 $x(t)$, $y(t)$, $h_2(t)$ 變為 $X^*(s)$, $Y^*(s)$ 和 $F_2^*(s)$ 的步驟與方程(2.1)所表示的求相當的拉氏變換 $X(s)$, $Y(s)$, $F_2(s)$ 的步驟是非常相像的．在那裏被考慮的是連續的時間變數 $t$，但是現在所考慮的是離散的時刻 $nt_0$．所以，那裏的積分符號也就被換為求和符號．不難看出，方程(7.3)，(7.4)和(7.5)所表示的是拉氏變換的一種變形，這種變形自然適用於採樣伺服系統的情形．

我們暫時先來考慮 $F_2(s)$ 的所有極點都在虛軸左方的情形．在這種情況下，當 $t$ 趨向於無限大的時候，$h_2(t)$ 就按指數律衰減下去，而且對於實數部分大於某一個負常數的所有 $s$ 值．公式(7.5)的級數都是收斂的．當然，公式(7.3)和(7.4)的級數的收斂性是與輸入信號的性質有關的．我們只限於考慮這樣一類輸入信號：它們使得(7.3)和(7.4)的級數的收斂狀態和(7.5)的級數相同．其實，對於 $x(t)$ 來說，這個限制是很微弱的，在過渡過程理論中，我們也常常引進這個限制．

把方程(7.2)先用 $e^{-nt_0s}$ 乘，然後再對所有的 $n$ 值求和，我們就得到

$$Y^*(s) = F_1\left[X^*(s) - \theta t_0 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt_0s} \sum_{k=0}^{n} y(kt_0)h_2(nt_0 - kt_0)\right].$$

但是

$$\theta t_0 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt_0s} \sum_{k=0}^{n} y(kt_0)h_2(nt_0 - kt_0)$$
$$= \theta t_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} y(kt_0)e^{-kt_0s}e^{-(n-k)t_0s}h_2(nt_0 - kt_0)$$
$$= \theta t_0 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} y(kt_0)e^{-kt_0s}e^{-mt_0s}h_2(mt_0)$$
$$= \theta F_2^*(s)Y^*(s).$$

在以上的數學計算中，我們把對於 $n$ 與 $k$ 的求和換成對於 $k$ 與 $m = n - k$ 的求和．這個數學的變換可以用圖7.2來說明．圖中用矢綫表示求和的順序和求和的區域．根據這個計算的結果，就得到

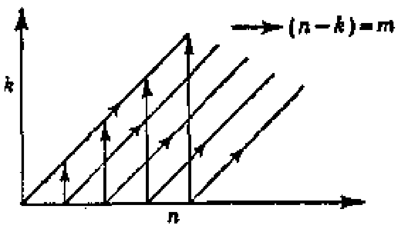


圖 7.2

$$Y^*(s) = F_1[X^*(s) - \theta F_2^*(s)Y^*(s)]$$

或

$$\frac{Y^*(s)}{X^*(s)} = \frac{F_1}{1 + \theta F_1 F_2^*(s)}. \tag{7.6}$$

方程(7.6)與以前討論過的反饋伺服系統的基本方程(4.3)是類似的．這兩種情況的區別在於所牽涉到的函數的解析性質是不同的．以後我們還要討論這個問題．

現在我們假設 $y(nt_0)$ 具有這樣的特性：只要 $s$ 的實數部分不是負數，$Y^*(s)$ 的級數就是收斂的．對於純虛數的 $s$ 值，級數當然也是收斂的．假設 $s = i\omega$，就有

$$Y^*(i\omega)e^{int_0\omega} = \sum_{m=0}^{\infty} y(mt_0)e^{-it_0\omega(m-n)}.$$

因而有

$$\int_{\omega_0}^{\omega_0+(2\pi/t_0)} Y^*(i\omega)e^{int_0\omega}\,d\omega = y(nt_0)\frac{2\pi}{t_0}$$

或者

$$y(nt_0) = \frac{t_0}{2\pi i}\int_{\omega_0}^{\omega_0+(2\pi/t_0)} Y^*(i\omega)e^{int_0\omega}\,id\omega.$$

設 $i\omega = s$，並且 $i\omega_0 = s_0$，最後就得到

$$y(nt_0) = \frac{t_0}{2\pi i}\int_{s_0}^{s_0+(2\pi i/t_0)} Y^*(s)e^{nt_0 s}ds.$$

根據關於複變函數積分的柯西(Cauchy)定理，

$$y(nt_0) = \frac{t_0}{2\pi i}\int_\Gamma Y^*(s)e^{nt_0 s}ds = \frac{t_0}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F_1X^*(s)e^{nt_0 s}}{1+\theta F_1F_2^*(s)}ds, \qquad (7.7)$$

正如圖 7.3 所表示的那樣，$\Gamma$ 是連接 $s$ 平面的虛軸上距離為 $2\pi/t_0$ 的兩點的一條積分路綫，而且被積函數的所有奇點都必須在 $\Gamma$ 的左方．以上所講的是 $Y^*(s)$ 的奇點都在左半 $s$ 平面的情形．但是如果按照同樣的條件規定積分路綫 $\Gamma$，那末，即使 $Y^*(s)$ 在右半 $s$ 平面上有極點．方程(7.7)也還是成立的．

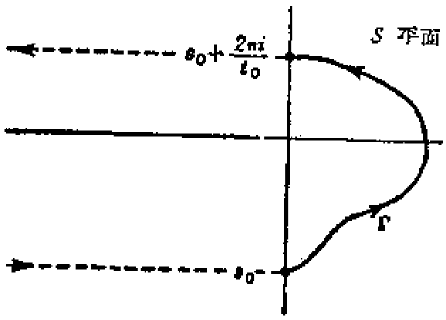


圖 7.3

根據 $X^*(s)$ 和 $F_2^*(s)$ 的周期性，我們可以在積分路綫 $\Gamma$ 上再增加兩條與實軸平行的虛直綫而不會影響積分(7.7)的值(圖 7.3)．這樣一來，被積函數的全部極點都被包含在新的積分路綫之內了．可以證明：對於合理的輸入信號來說，$X^*(s)$ 不會有實數部分是正數的極點．因此，使輸出不穩定的原因只可能是這樣的：方程(7.7)的被積函數的分母有實數部分是正數的零點．所以，和普通的伺服控制系統非常相似，穩定性的必須而且充分的條件就是：方程

$$1 + \theta F_1F_2^*(s) = 0, \qquad (7.8)$$

在右半 $s$ 平面沒有零點．下面我們就來講一講如何把第 4.3 節的乃氏準則適當地加以修改，使得這個準則也能應用在目前的穩定條件上．

### 7.3 採樣伺服系統的乃氏準則

因為 $F_2^*(s)$ 是周期函數，所以，如果希望知道方程(7.8)在右半平面有沒有零點，我們只要看一看在一個寬度是 $2\pi/t_0$ 從虛軸開始向右方無限延展的條形區域裏有沒有方程(7.8)的零點就足夠了(圖 7.4)．假定 $F_2^*(s)$ 在虛軸上和虛軸的右方沒有奇點，並且假定 $1+\theta F_1F_2^*(s)$ 在虛軸上沒有零點，我們就能夠(而且實際上也是這樣作的)把條形區域在鉛直方向適當地移動一下，使得條形區域的水平邊上沒有 $1+\theta F_1F_2^*(s)$ 的零點．現在我們

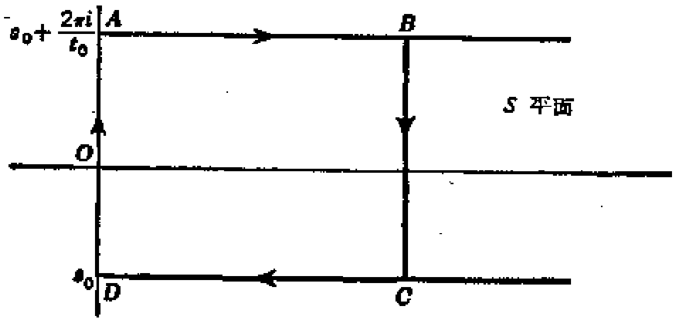


圖 7.4

讓 $s$ 點在圖 7.4 所表示的閉合曲綫 $ABCDA$ 上轉動一周．這時，向量 $\theta F_1F_2^*(s)$ 的頂點也就相應地描繪出某一條閉合曲綫 $A'B'C'D'A'$，就像圖 7.5 所表示的那種情形一樣．我們並不想把這條向量 $\theta F_1F_2^*(s)$ 的頂點曲綫真正畫出來．當 $s$ 走過 $AB$ 時，我們就得到

$A'B'$ 弧．當 $s$ 走過 $BC$ 時，我們又得到一個弧綫 $B'C'$；因為 $F_2^*(s)$ 的周期性，$B'C'$ 是一條閉合曲綫．當 $s$ 走過 $CD$ 時，我們就得到 $C'D'$ 弧；同樣，由於 $F_2^*(s)$ 的周期性，$C'D'$ 與 $A'B'$ 相重合但是方向相反．最後，當 $s$ 走過 $DA$ 時，我們就得到 $D'A'$ 弧，不難看出 $D'A'$ 也是一條閉合曲綫．

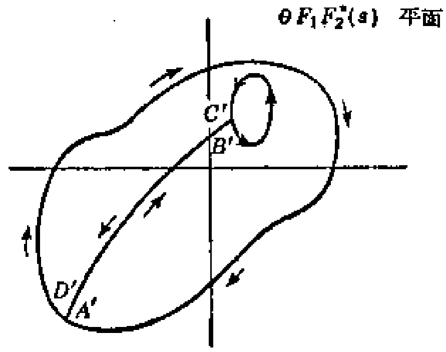


圖 7.5

根據柯西定理，如果想知道在矩形區域 $ABCDA$ 內有沒有方程(7.8)的零點，我們只需要研究一下當動點 $\theta F_1F_2^*(s)$ 在閉曲綫 $A'B'C'D'A'$ 上走一周時，從 $-1$ 到 $\theta F_1F_2^*(s)$ 點的向量是否圍繞 $-1$ 點轉動了不等於零的總圈數就够了．現在我們來考慮一下，當圖 7.4 的矩形的 $BC$ 邊無限地向右移動時的情况．由方程(7.5)很容易看出：圖 7.5 中的閉合曲綫弧 $B'C'$ 必然要逐漸收縮成一個點．所以，實際上起作用的只是閉合曲綫弧 $D'A'$．很明顯，方程(7.8)在條形區域內是否有零點的問題就化為這樣一個問題：當動點 $\theta F_1F_2^*(s)$ 在 $D'A'$ 上轉動一周時，從 $-1$ 點到動點的向量是否圍繞 $-1$ 點轉動了不等於零的總圈數．這就是簡單的採樣伺服系統(7.2)的乃氏準則[5]．

以上我們所講的就是關於採樣伺服系統的施梯必茨-申南理論的基本內容．這個理論不論在觀點上或在形式上都與連續作用的伺服系統的理論十分相像．

### 7.4 穩態誤差

如果輸入是單位階躍函數 $1(t)$，

$$X^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nt_0s}=\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-t_0s})^n=\frac{1}{1-e^{-t_0s}},$$

根據方程(7.7)就有

$$y(nt_0)=\frac{t_0F_1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{nt_0s}ds}{[1-e^{-t_0s}][1+\theta F_1F_2^*(s)]}.$$

當 $n\to\infty$ 時，只有原點是有重要作用的極點，

$$\lim_{n\to\infty}y(nt_0)=\frac{F_1}{1+\theta F_1F_2^*(0)}. \tag{7.9}$$

如果輸入是一個常數 $1(t)$，這個方程就給出輸出的穩態值．因此，穩態誤差相當小的條件就是

$$F_1\approx 1+\theta F_1F_2^*(0)$$

或者

$$F_1\approx\frac{1}{1-\theta F_2^*(0)}. \tag{7.10}$$

如果要求輸出與輸入的差數相當微小，我們就必須按照條件(7.10)來規定前向控制綫路的放大 $F_1$ 的近似值．採樣伺服系統的條件(7.10)與連續作用伺服系統的條件(4.11)是類似的．

### 7.5 $F_2^*(s)$ 的計算

為了使以上的採樣伺服系統理論更加切合實際,我們還必須作進一步的討論.

$F_2(s)$ 與 $F_2^*(s)$ 這兩個函數都是用來表示反饋綫路的特性的: 當反饋綫路是連續作用的伺服的組成部分的時候, $F_2(s)$ 就是很重要的特性. 但是,當反饋綫路用在採樣伺服系統上的時候, $F_2^*(s)$ 就成為重要的特性了. 從數學上來看. $F_2(s)$ 比 $F_2^*(s)$ 簡單得多, 而且,我們也常常把 $F_2(s)$ 直接用到設計綫路的方法上去. 因此,找出 $F_2^*(s)$ 與 $F_2(s)$ 的關係,就是很重要的事情了,而且我們還希望這個關係越直接越好. 再重複一次: $F_2^*(s)$ 是 $s$ 的周期函數,周期是虛數 $i2\pi/t_0$. 並且,當我們用乃氏準則分析系統的性能的時候,只需要在 $-\pi/t_0<\omega<\pi/t_0$ 的範圍內研究頻率特性 $F_2^*(i\omega)$ 就够了.

假定 $s$ 的實數部分比 $\gamma$ 大, 按照以前的假設, $\gamma$ 是一個負數, 根據方程(7.1)和方程(7.5)我們就得到

$$F_2^*(s)=\frac{t_0}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nt_0s}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F_2(q)e^{nt_0q}dq$$

$$=\frac{t_0}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F_2(q)dq\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nt_0(s-q)}$$

$$=\frac{t_0}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F_2(q)dq}{1-e^{-t_0(s-q)}}. \tag{7.11}$$

以下我們就用留數方法(殘數方法)來計算(7.11)右端的積分.

被積函數有若干個極點: $F_2(s)$ 的極點都在積分路綫的左方; 但是那些由方程 $1-e^{-t_0(s-q)}=0$ 的零點所構成的極點都在積分路綫的右方. 不難看出: 沿着從 $\gamma-i\infty$ 到 $\gamma+i\infty$ 的直綫的積分值等於在順時針方向上沿着這樣一條閉合積分路綫上的積分值: 這條閉合路綫是由原來的直綫和右半平面上以那條直綫為直徑的一個無限大的半圓周所組成的. 因此, 方程(7.11)右端的積分值等於 $-t_0$ 與被積函數在方程 $1-e^{-t_0(s-q)}=0$ 的各個零點的留數的和的乘積.

方程 $1-e^{-t_0(s-q)}=0$ 的零點的一般形式是 $q=s+(2\pi im/t_0)$, $m$ 是任何整數. 被積函數在這樣一個極點處的留數是 $-(1/t_0)F_2[s+(2\pi im/t_0)]$. 所以,就得出

$$F_2^*(s)=\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}F_2\left(s+\frac{2\pi im}{t_0}\right). \tag{7.12}$$

這個公式使我們能够相當深刻地看出 $F_2^*(s)$ 的性質, 有時候也可以利用這個公式進行近似的計算. 但是,我們還可以用相當簡單的有限形式把 $F_2^*(s)$ 精確地表示出來.

函數 $F_2(s)$ 可以寫成有限多個部分分式的和,

$$F_2(s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s-s_k}, \tag{7.13}$$

這裏的各個 $a_k$ 和 $s_k$ 都是常數, $n$ 是 $F_2(s)$ 的分母多項式的次數. 這樣一來, 利用方程(7.12)就有

$$F_2^*(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left\{\frac{1}{s-s_k} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2\pi im/t_0)+(s-s_k)} - \frac{1}{(2\pi im/t_0)-(s-s_k)}\right]\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \left[\frac{1}{s-s_k} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(s-s_k)}{(4\pi^2 m^2/t_0^2)+(s-s_k)^2}\right]. \tag{7.14}$$

但是,我們知道 $\coth z$ 有如下的展開式:

$$\coth z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2\pi^2+z^2}.$$

所以,方程(7.14)中對 $m$ 所求的和數可以計算出來,因此就得出

$$F_2^*(s) = \frac{t_0}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k \coth\left[\frac{(s-s_k)t_0}{2}\right]. \tag{7.15}$$

利用這個公式,對於任意的 $s$ 值都可以把 $F_2^*(s)$ 準確地計算出來。

如果 $t_0$ 很小, $F_2(i\omega)$ 的值在 $-\pi/t_0<\omega<\pi/t_0$ 間隔之外小到略去不計的程度,那末,根據方程(7.12)就可以很清楚地看出 $F_2^*(s)$ 的定性的性質. 事實上,在間隔 $-\pi/t_0<\omega<\pi/t_0$ 裏 $F_2^*(i\omega)$ 差不多就等於 $F_2(i\omega)$. 我們將要看到,如果 $t_0$ 相當大,我們也還可以得到一個相當簡單的 $F_2^*(i\omega)$ 的近似表示式. 把各個零點 $s_k$ 寫作

$$s_k = -\lambda_k + i\omega_k, \tag{7.16}$$

這些 $\lambda_k$ 和 $\omega_k$ 都是實數. 根據我們的假設,所有的 $\lambda_k$ 都是正數. 按照方程(7.15),現在就得出:

$$F_2^*(i\omega) = \frac{t_0}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k \coth\left\{\frac{t_0}{2}\left[\lambda_k + i(\omega-\omega_k)\right]\right\}$$

$$= \frac{t_0}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{1+e^{-t_0[\lambda_k+i(\omega-\omega_k)]}}{1-e^{-t_0[\lambda_k+i(\omega-\omega_k)]}}.$$

因此,對於大的 $t_0$ 值就有

$$F_2^*(i\omega) \approx \frac{t_0}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k \{1+2e^{-t_0[\lambda_k+i(\omega-\omega_k)]}\}. \tag{7.17}$$

當 $s$ 很大的時候,方程(7.13)可以寫作

$$F_2(s) = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{1}{s^2}\sum_{k=1}^{n} a_k s_k + \cdots.$$

但是我們曾經假定:反饋綫路對於冲量的反應是連續的,所以,當 $s$ 很大時, $F_2(s)\sim 1/s^2$,因此

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 0. \tag{7.18}$$

這樣一來,方程(7.17)就變成

$$F_2^*(i\omega) \approx t_0 e^{-it_0\omega}\sum_{k=1}^{n} a_k e^{t_0 s_k}. \tag{7.19}$$

對於實際的物理系統來說, $s_k$ 或者是實數,或者成複共軛對出現,所以方程(7.19)中的和數一定是實數. 因此,當 $\omega$ 從 $-\pi/t_0$ 變到 $\pi/t_0$ 的時候, $F_2^*(i\omega)$ 的圖綫是一個圓,這個圓的半徑是

$$\left| t_0 \sum_{k=1}^{n} a_k e^{t_0 s_k}\right|. \tag{7.20}$$

## 7.6 連續作用伺服系統與採樣伺服系統的比較

我們已經看到，如果 $t_0$ 的值很小，$F_2^*(i\omega)$ 差不多就等於 $F_2(i\omega)$. 對於連續作用伺服系統來說，穩定性的判斷準則就是 $F_1F_2(i\omega)$ 圖綫應該不繞過 $-1$ 點. 對於採樣伺服系統來說，$\theta F_1F_2^*(i\omega)$ 圖綫應該不繞過 $-1$ 點，或者說，$F_1F_2(i\omega)$ 圖綫應該不繞過 $1/\theta$ 點. 因此，如果只考慮系統的穩定性，採樣伺服系統的放大 $F_1$ 就可以比普通的連續作用伺服系統大得多.

如果 $t_0$ 的值很大，根據方程(7.19)和(7.20)乃氏準則就變為

$$\theta F_1\left| t_0 \sum_{k=1}^{n} a_k e^{t_0 s_k} \right| < 1.$$

既然 $s_k$ 的實數部分都是負數，$F_2^*(i\omega)$ 圖綫的半徑就很小，又因為開關閉合時間與採樣周期的比值 $\theta$ 也是一個很小的數，所以，我們可以使放大 $F_1$ 相當大而不會引起系統的不穩定.

由此可見，不論採樣周期 $t_0$ 大小如何，採樣伺服系統的穩定運轉的條件總是比普通的反饋伺服系統的穩定運轉條件寬鬆得多. 這個事實也許是可以預料到的：因為只在很小的一部分時間之內，系統才具有反饋作用，所以，除了採樣時刻的值以外，對於輸出並沒有任何限制，因此，穩定性條件當然也就可以弱一些.

## 7.7 $F_2(s)$ 在原點有極點的情形

在實際情況中，$F_2(s)$ 很可能在 $s=0$ 處有一個極點. 為了避免某些不必要的麻煩，以前我們並沒有考慮這種情形. 現在，我們把這種情形簡短地討論一下.

首先，我們可以看到，如果 $s=0$ 是 $F_2(s)$ 的一個極點，那末常數 $\gamma$ 就必須是正數，而且 $F_2^*(s)$ 的無窮級數表示式(7.12)只在 $s$ 的實數部分是正數時成立. 其次，系統的乃氏圖也要發生變化；最顯著的變化就是：乃氏圖不再是閉合曲綫，而是一條開放的曲綫了. 我們也可以認為這條曲綫在無限遠處的兩個端點是被一個順時針方向的無限大的半圓周所連接起來的. 然而，在這種情形中，$F_2^*(s)$ 的有限表示式(7.15)仍然成立. 如果，設 $s_1=0$，那末，方程(7.15)就變為

$$F_2^*(i\omega) = \frac{t_0}{2}\left[ -ia_1 \cot\frac{\omega t_0}{2} + \sum_{k=2}^{n} a_k \coth\frac{t_0[\lambda_k + i(\omega-\omega_k)]}{2} \right].$$

如果 $t_0$ 的值很大，我們就得到一個類似於方程(7.17)的公式，

$$F_2^*(i\omega) = \frac{t_0}{2}\left[ -ia_1 \cot\frac{\omega t_0}{2} + \sum_{k=2}^{n} a_k \left\{1 + 2e^{-t_0[\lambda_k+i(\omega-\omega_k)]}\right\} \right].$$

但是按照方程(7.18)，

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n = -a_1,$$

所以

$$F_2^*(i\omega) = -\frac{a_1 t_0}{2}\left[1 + i\cot\frac{\omega t_0}{2}\right] + t_0 e^{-it_0\omega} \sum_{k=2}^{n} a_k e^{t_0 s_k}. \tag{7.21}$$

常數 $a_1$ 當然是一個正實數. 當 $\omega$ 從 $-\pi/t_0$ 變化到 $\pi/t_0$ 時，(7.21)的第一項就給出一條平行於虛軸的直綫. 第二項是一個正弦函數. 因此，乃氏圖就是一條被變為正弦波形狀的直綫.

# 第八章

## 有時滯的綫性系統[13,22]

在這一章裏，我們將要在常系數綫性系統裏再引進一種新的因素，這就是時滯．所謂時滯 $\tau$ 的意義是：系統的各個變數之間的關係不能够用這些變數在同一時刻 $t$ 的值的關係來表示，相反地，這個關係牽涉到某些變數在時刻 $t$ 的值，同時也牽涉到某些變數在時刻 $t-\tau$ 的值．那些在時刻 $t-\tau$ 取數值的變數與那些在時刻 $t$ 取數值的變數比較，在時間上的滯後（時滯）就是 $\tau$．因此，時滯 $\tau$ 與第 3.1 節所講的一階綫性系統的時間常數是十分不同的．時滯系統（有時滯作用的系統）的運動狀態是用常系數的微分差分方程描述的，這當然比以前所討論過的只用微分方程描述的系統要複雜得多．曾有很多科學家研究過有時滯的系統，譬如說：卡蘭德爾(A. Callander)，哈爾垂(D. Hartree)與波特爾(A. Porter)[1] 以及米諾爾斯基(N. Minorsky)[2]．但是，我們要討論的問題的範圍是更狹小的．我們只希望知道：如果反饋伺服系統有一個固有的時滯 $\tau$，那末，應該怎樣分析這個系統的運動狀態？我們特別希望把第 4.8 節的乃氏方法加以修改，使這個方法也能應用到時滯系統上來．

以下我們要通過時滯系統的一個特例的處理來說明這種理論．這個特例就是用反饋控制方法使火箭發動機中的燃燒過程穩定．很多學者研究過火箭發動機中燃燒過程的不穩定現象，但是下面所講的關於燃燒的時滯現象的分析只是根據克洛克(L. Crocco)的研究結果[3]．為了使計算簡單起見[4]，我們只考慮火箭發動機的所謂"低頻率振盪"的情況，並且假設只用一種液體燃料．

### 8.1 燃燒中的時滯

假設 $\dot{m}_b(t)$ 是時刻 $t$ 時由於燃燒而產生的熱燃氣的質量速率（所謂"質量速率"就是按照質量來計算的時間變化率）．$\dot{m}_i(t)$ 是在時刻 $t$ 時噴入燃料的質量速率．$\tau(t)$ 是在時刻 $t$ 開始燃燒的那些燃料的時滯．所以，在從 $t$ 到 $t+dt$ 這一段時間間隔內燃燒的燃料是在從 $t-\tau$ 到 $t-\tau+d(t-\tau)$ 這一段時間間隔內噴射進來的．因此，

$$\dot{m}_b(t)dt = \dot{m}_i(t-\tau)d(t-\tau). \tag{8.1}$$

產生出來的熱燃氣，有一部分被用來充加在燃燒室中，從而提高燃燒室中的壓力 $p(t)$，另外一部分通過噴口被噴射出去．如果燃燒室中可能發生的振盪的頻率相當低，因此，就可以把燃燒室內的壓力看作是均匀的，而且，作為第一次的近似[5]，我們也可以把流

1) A. Callander, D. Hartree and A. Porter, *Trans. Roy. Soc. London* (A), **235**, 415—444 (1935).

2) N. Minorsky, *J. Appl. Mechanics* (ASME). **9**, 67—71 (1942).

3) L. Crocco, *J. Am. Rocket Soc.*, **21**, 163—178 (1951).

4) 以下的討論是根據下列文章的：*J. Am. Rocket Soc.*, **22**, 256—262 (1952).

5) H. S. Tsien (錢學森), *J. Am. Rocket Soc.*, **22**, 139—143 (1952).

過噴口的氣流看作是似穩的(所謂"似穩"的意思就是:在任何一段不太長的時間間隔內都可以看作是平穩的)。所以,經過噴口的噴氣的質量速率與火箭發動機中的熱燃氣的密度成正比. 但是,對於"單一燃料"(也就是只用一種燃料)的火箭發動機來說,熱燃氣的溫度幾乎與燃燒壓力無關,而熱燃氣的密度只與壓力成正比,所以,如果 $\bar{m}$ 是流過整個系統的穩態質量速率; $\bar{M}_g$ 是發動機中的熱燃氣的平均質量; $\bar{p}$ 是燃燒室中的壓力的穩態值. 如果把尚未燃燒的液體燃料在燃燒室中所佔據的容積忽略不計,我們就有

$$\dot{m}_b dt = \bar{m}\left(\frac{p}{\bar{p}}\right)dt + d\left(\bar{M}_g\frac{p}{\bar{p}}\right). \tag{8.2}$$

現在,對於燃燒室壓力與燃料噴入速率,我們分別引進兩個無量綱變數 $\varphi$ 和 $\mu$,它們的定義是:

$$\varphi = \frac{p-\bar{p}}{\bar{p}}, \quad \mu = \frac{\dot{m}_i - \bar{m}}{\bar{m}}, \tag{8.3}$$

所以 $\varphi$ 和 $\mu$ 就是壓力和噴入速率與穩態平均值的偏差的相對偏差. 利用方程(8.3),並且把 $\dot{m}_b$ 從方程(8.1)和(8.2)消去,就得到

$$\frac{\bar{M}_g}{\bar{m}}\frac{d\varphi}{dt} + \varphi + 1 = \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right)[\mu(t-\tau)+1]. \tag{8.4}$$

為了計算 $d\tau/dt$, 就必須引進克洛克的壓力與時滯相關的概念. 液體燃料從射入燃燒室到即將燃燒的臨界狀態需要一段加熱的時間(也就是時滯), 然後就迅速地燃燒而變為熱燃氣. 假定液體燃料達到燃燒臨界狀態的質量速率是 $f(p)$,那末,時滯 $\tau$ 就由下列公式確定:

$$\int_{t-\tau}^{t} f(p)dt = \text{const.} \tag{8.5}$$

可以把常數看作是為了把單位質量的噴入的冷燃料變到即將燃燒的狀態所必需加進去的熱量. $f(p)$ 的物理意義就是:從熱燃氣到噴入的液體燃料的傳熱速率. 把方程(8.5)對 $t$ 微分就得

$$[f(p)]_t - [f(p)]_{t-\tau}\left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right) = 0. \tag{*}$$

現在我們就可以明確地引進離開均勻穩定狀態的微小擾動的概念. 假設壓力 $p$ 與穩態值 $\bar{p}$ 之間的偏差相當小. 那末 $f(p)$ 在時刻 $t$ 的值以及 $f(p)$ 在時刻 $t-\tau$ 的值都可以用 $\bar{p}$ 附近的泰勒級數表示. 如果不考慮級數中二次以上的方冪,就有

$$[f(p)]_t = f(\bar{p}) + \bar{p}\left(\frac{df}{dp}\right)_{p=\bar{p}}\varphi(t), \tag{**}$$

$$[f(p)]_{t-\tau} = f(\bar{p}) + \bar{p}\left(\frac{df}{dp}\right)_{p=\bar{p}}\varphi(t-\tau).$$

以上方程中的 $\tau$ 是相當於平均壓力 $\bar{p}$ 的時滯,所以是一個常數. 把(**)的兩個關係式相除,再利用(*)的關係就得出下列近似公式:

$$1 - \frac{d\tau}{dt} = 1 + \left(\frac{d\log f}{d\log p}\right)_{p=\bar{p}}[\varphi(t) - \varphi(t-\tau)]. \tag{8.6}$$

把方程(8.4)和(8.6)合併起來,並且略去二次項,就得出下列方程:

$$\frac{d\varphi}{dz}+\varphi=\mu(z-\delta)+n[\varphi(z)-\varphi(z-\delta)],\tag{8.7}$$

在這個方程裏

$$n=\left(\frac{d\log f}{d\log p}\right)_{p=\bar{p}},\tag{8.8}$$

而

$$\theta_g=\frac{\overline{M}_g}{\bar{m}},\quad z=\frac{t}{\theta_g},\quad \delta=\frac{\tau}{\theta_g},\tag{8.9}$$

所以 $\theta_g$ 是發動機內的燃氣的質量的平均值與流過發動機的燃氣的平均質量速率的比值,因此它也就是熱燃氣從被燃燒產生到經過噴口噴射出去的平均時間,所以 $\theta_g$ 就稱為"燃氣通過時間". 在以下的計算中,我們就用這個基本的時間常數作為測量時間的單位. $z$ 是無量綱的時間變數. $\delta$ 是燃燒的無量綱的時滯常數.

如果 $n$ 是一個與 $\bar{p}$ 無關的常數,那末,$f(p)$ 就與 $p^n$ 成正比. 這就是克洛克所假設的 $f(p)$ 的形狀. 現在,我們要把問題提得稍微更普遍一些: $f(p)$ 是任意的; $n$ 是由方程(8.8)計算的,因而也就是 $\bar{p}$ 的函數. 如果把 $f(p)$ 看作是從熱燃氣到霧狀的液體燃料的傳熱速率,那末,關於傳熱的物理定律指出,$n$ 的值在 $\frac{1}{2}$ 與 1 之間.

## 8.2 薩奇(Satche)圖

克洛克把燃料噴入速率是常數時的燃燒不穩定性稱為固有不穩定性. 如果噴入速率是一個與燃燒室壓力 $p$ 無關的常數,那末,$\mu\equiv 0$. 因此,根據方程(8.7),穩定性問題就是由下列的簡單方程所限定的:

$$\frac{d\varphi}{dz}+(1-n)\varphi(z)+n\varphi(z-\delta)=0.\tag{8.10}$$

也可以用拉氏變換的方法來處理方程(8.10),作法和以前各章中處理沒有時滯的方程的方法是相同的. 事實上,安索夫(H. I. Ansoff)也用過這個方法[1]. 然而,在目前的燃燒的穩定性問題裏,基本方程沒有驅動項,所以,就可以用一個比較直接的解法,這個解法就是解綫性微分差分方程的古典方法,作法是這樣的:設

$$\varphi(z)\sim e^{sz},$$

於是

$$s+(1-n)+ne^{-\delta s}=0.\tag{8.11}$$

這是一個 $s$ 的方程. 燃燒的穩定性的條件就是: $s$ 的實數部分是負數.

也可以應用拉氏變換方法從方程(8.10)得出方程(8.11)來. 把方程(8.10)先用 $e^{-sz}$ 乘,然後,從 $z=0$ 到 $z=\infty$ 對變數 $z$ 積分,再假定 $\varphi(z)$ 的拉氏變換是 $\Phi(s)$,我們就得到

$$s\Phi(s)-\varphi(0)+(1-n)\Phi(s)+n\int_0^\infty\varphi(z-\delta)e^{-sz}\,dz=0,$$

1) H. I. Ansoff, *J. Appl. Mechanics* (ASME), **16**, 158—164 (1949).

然而

$$\int_0^\infty \varphi(z-\delta)e^{-sz}dz = e^{-s\delta}\int_0^\infty \varphi(z-\delta)e^{-s(z-\delta)}dz$$
$$= e^{-s\delta}\left[\Phi(s) + \int_{-\delta}^{0}\varphi(z')e^{-sz'}dz'\right].$$

因此，如果 $\varphi(z)$ 的初始條件是所謂的零初始條件，也就是說：$z \leqslant 0$ 時，$\varphi(z)=0$．那末，就有

$$[s+(1-n)+ne^{-s\delta}]\,\Phi(s)=0.$$

於是，我們就得到方程(8.11)。這裏的 $s$ 和以前各章中的變數 $s$ 具有相同的"意義"．這兩者之間的唯一的區別就是這裏的 $s$ 已經被通過時間 $\theta_0$ 變爲無量綱量了．也可以看到這樣一個有興趣的事實：如果方程(8.10)是一個在方程右端有驅動項的非齊次方程，那末，對這個方程施行拉氏變換法以後，所得到的方程仍然是非齊次的．如果把 $\varphi(z)$ 看作是系統的輸出，系統的傳遞函數就會是

$$F(s)=\frac{1}{s+(1-n)+ne^{-s\delta}},$$

這個 $F(s)$ 又是一個超越的傳遞函數的例子．

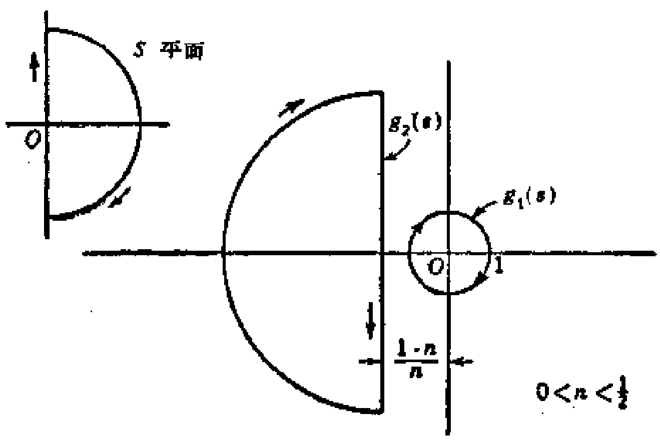


圖 8.1

克洛克把方程(8.11)的實數部分和虛數部分分離開來得到兩個方程，根據這兩個方程他解出方程(8.11)的複數根 $s$．然而，如果只對系統是否穩定的問題有興趣，那末，我們仍然可以成功地利用第 4.3 節的柯西定理．設

$$G(s)=e^{-\delta s}-\left(-\frac{1-n}{n}-\frac{s}{n}\right). \tag{8.12}$$

於是，系統的穩定性問題就歸結爲 $G(s)$ 在複 $s$ 平面的右半部有沒有零點的問題．當 $s$ 在一條包圍右半平面的閉合曲綫(就像圖 4.4 所畫的那樣)上轉動一周時，我們只要把變數 $G(s)$ 的相應的變化情況加以考察，就能够回答系統是否穩定的問題．如果向量 $G(s)$ 旋轉的總圈數是某一個數，按照柯西定理這個數就是 $G(s)$ 在右半 $s$ 平面上的零點個數與極點個數的差．既然，在全 $s$ 平面上 $G(s)$ 顯然沒有極點，所以，$G(s)$ 旋轉的總圈數就是零點的個數．因此，如果系統是穩定的，那末，當 $s$ 在上述的閉合曲綫上轉動一周時，$G(s)$ 旋轉的總圈數一定是零。所以，可以用描畫乃氏圖的辦法來回答穩定性的問題．

但是，對方程(8.12)所表示的 $G(s)$ 直接應用上述的方法是很不方便的，因爲時滯項 $e^{-\delta s}$ 的存在，這個表示式是比較複雜的．對於這樣一些有時滯的系統，薩奇(M. Satche)提出了一個富有創造性的巧妙的處理方法[1]：不直接處理 $G(s)$ 本身，而把它分成兩部分：

1) M. Satche, *J. Appl. Mechanics* (ASME), **16**, 419—420 (1949).

$$G(s) = g_1(s) - g_2(s), \tag{8.13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} g_1(s) &= e^{-\delta s}, \\ g_2(s) &= -\frac{1-n}{n} - \frac{s}{n}, \end{aligned}\right\} \tag{8.14}$$

這樣一來,向量 $G(s)$ 就是一個頂點在 $g_1(s)$ 而起點在 $g_2(s)$ 的向量了. 如果 $s$ 在虛軸上變動, $g_1(s)$ 的圖綫就是一個單位圓. 如果 $s$ 在大的半圓周上, $g_1(s)$ 就在單位圓的內部. 當 $s$ 在虛軸上變動的時候, $g_2(s)$就是一條與虛軸平行的直綫(圖 8.1). 當 $s$ 在大的半圓周上變動時, $g_2(s)$ 就在左方描畫成一個大的半圓周,這個半圓周與 $s$ 所在的那個半圓周恰好組成一個圓周. 只要稍微考慮一下,就可以想到:如果希望對於任何時滯 $\delta$ 的値, $G(s)$ 旋轉的總圈數都是零,那末, $g_2(s)$ 圖綫就必須完全在 $g_1(s)$ 圖綫的外面. 這也就是說,對於無條件的本質上的穩定系統,也就是絕對穩定系統[1]來說,必須有

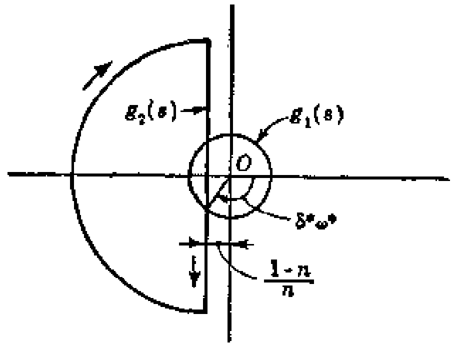



圖 8.2

$$\frac{1-n}{n} > 1 \quad 或者 \quad \frac{1}{2} > n > 0. \tag{8.15}$$

現在, 很容易看出把 $G(s)$ 分解爲 $g_1(s)$ 和 $g_2(s)$ 兩部分的作法可以使得相當的兩條圖綫都比原來的 $G(s)$ 圖綫簡單得很多. $g_1(s)$ 的圖綫與 $g_2(s)$ 的圖綫組成的圖綫就稱爲薩奇圖.

如果 $n > \frac{1}{2}$, $g_1(s)$ 的圖綫就與 $g_2(s)$ 的圖綫相交, 因而有一部分 $g_2(s)$ 點在圖 8.2 的單位圓的內部,但是,只要相當於這些 $g_2(s)$ 的 $g_1(s)$ 點都在 $g_2(s)$ 點的右方, 系統仍然是穩定的. 如果以下的關係式成立,以上的條件就得到滿足:

$$\cos\left(\delta\sqrt{2n-1}\right) > -\frac{1-n}{n}$$

或者

$$\delta < \delta^*,$$

這裏

$$\delta^* = \frac{\cos^{-1}\left(-\dfrac{1-n}{n}\right)}{\sqrt{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1-n}{n}\right)\right]. \tag{8.16}$$

當 $\delta = \delta^*$ 時,再假設

$$\omega^* = \sqrt{2n-1}, \tag{8.17}$$

就有 $G(i\omega^*) = 0$. 因此,當 $\delta = \delta^*$ 時, $\varphi(z)$ 有一個頻率是 $\omega^*$ 的振盪解. 所以, $\delta^*$ 是無量綱的臨界時滯,而 $\omega^*$ 是無量綱的臨界頻率.

1) 這也就是說,對於任何 $\delta$ 值,系統都是穩定的.

## 8.3 有反饋伺服機構的火箭發動機的系統動力學性質

現在我們來考慮圖 8.3 所畫的火箭發動機系統，這個系統中包含有供應燃料的饋送機構（燃料泵和附屬的傳導裝置）。爲了近似地表示出實在的導管的彈性效應，我們可以假想在剛硬的導管的中點（燃料泵與燃料噴嘴之間）有一個附有彈簧活塞的容器，在噴嘴附近還有另外一個由伺服機構控制的容器。傳感器（測量儀器）測量了燃燒室的壓力，測量的結果經過一個放大器而成爲伺服機構的輸入信號。如果設計者已經把燃料的饋送機構和火箭發動機本身的設計完全確定，不允許再加以更改，現在的問題就是：是否可以設計一個使整個系統穩定的合適的放大器？因爲關於燃燒的時滯還沒有確切的知識，所以，在進行實際設計的時候，我們就必須設法使系統無條件地穩定，也就是說，對於任何的時滯 $\delta$ 的值系統都是穩定的。

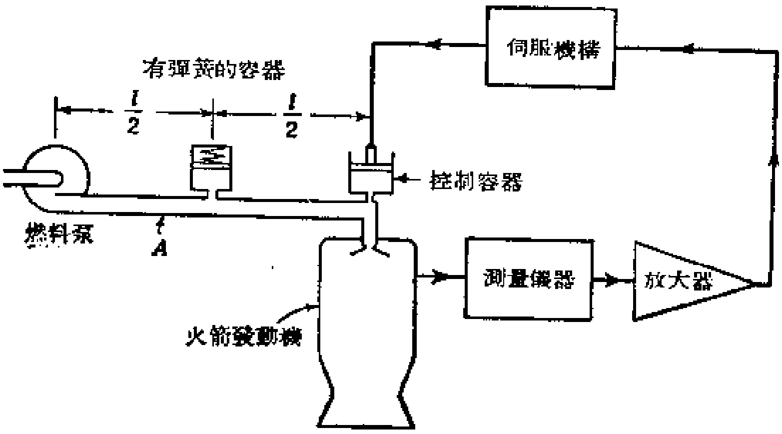



圖 8.3

假定 $\dot{m}_0$ 是流出燃料泵的燃料的瞬時質量速率；$p_0$ 是燃料泵的出口處的瞬時壓力，燃料流動的平均速率一定是 $\bar{\dot{m}}$，平均壓力是 $\bar{p}_0$。燃料泵的特性可以用上列方程表示：

$$\frac{p_0-\bar{p}_0}{\bar{p}_0} = -\alpha\frac{\dot{m}_0-\bar{\dot{m}}}{\bar{\dot{m}}}. \tag{8.18}$$

如果質量的流動的變化的時間速率比彈性波在液體中的傳播速度小，但是比燃料泵的轉速的緩慢的時間變化率大，那末，相當於常數轉速的情况，燃料泵的壓力-體積曲綫在穩態工作點的斜率就是 $\alpha$（這裏所說的“體積”就是流出燃料泵的燃料按照體積計算的速率）。對於普通的離心泵來說，$\alpha$ 差不多等於 1. 對於傳輸泵（輸出的流量幾乎是不變的泵）來說，$\alpha$ 非常大. 對於等壓泵或者簡單的增壓裝置來說，$\alpha$ 等於零.

假設 $\dot{m}_1$ 是噴嘴與彈簧容器口之間的燃料流動的瞬時質量速率；$\chi$ 是容器的彈簧常數，$p_1$ 是作用在容器上的瞬時壓力. 於是就有

$$\dot{m}_0-\dot{m}_1=\rho\chi\frac{dp_1}{dt}, \tag{8.19}$$

這裏的 $\rho$ 是燃料的密度，它是一個常數.

在以下的計算裏，由於摩擦力而在導管上引起的壓力降落是被忽略不計的. 因此，壓力差 $p_0-p_1$ 只是由流動的加速度引起的，也就是說

$$p_0-p_1=\frac{l}{2A}\frac{d\dot{m}_0}{dt}, \tag{8.20}$$

這裏的常數 $A$ 是導管的横截面的面積；常數 $l$ 是導管的總長度. 與此類似，如果 $p_2$ 是控

制容器上的瞬時壓力，也就有

$$p_1 - p_2 = \frac{l}{2A}\frac{d\dot{m}_1}{dt}. \tag{8.21}$$

如果控制容器中所容納的質量是 $C$，那末

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_i = \frac{dC}{dt}. \tag{8.22}$$

因爲控制容器與燃料噴嘴非常接近，所以，在燃料從控制容器流到燃料噴嘴的過程中，由於質量而引起的慣性效應是可以忽略的。因此，

$$p_2 - p = \frac{1}{2}\frac{\dot{m}_i^2}{\rho A_i^2}, \tag{8.23}$$

其中的 $A_i$ 是燃料噴嘴的有效開口面積．因爲在穩定狀態下壓力 $\bar{p}_0$ 與 $\bar{p}$ 的差 $\Delta\bar{p}$ 是

$$\bar{p}_0 - \bar{p} = \Delta\bar{p} = \frac{1}{2}\frac{\bar{m}^2}{\rho A_i^2}, \tag{8.24}$$

所以在計算中可以把 $A_i$ 消去。 方程(8.18)和(8.24)就描述了燃料餽送系統的動力學性質．直接利用消去某些變數的計算方法，就得出 $\dot{m}_i$, $p$, 與 $C$ 之間的關係式。爲了把這個關係寫成無量綱的形式，我們引進下列幾個參數：

$$P = \frac{\bar{p}}{2\Delta\bar{p}}, \quad E = \frac{2\Delta\bar{p}}{\bar{m}\theta_g}\rho\chi, \quad J = \frac{l\bar{m}}{2\Delta\bar{p}A\theta_g}, \tag{8.25}$$

以及

$$\kappa = \frac{C}{\bar{m}\theta_g}, \tag{8.26}$$

這裏的 $\theta_g$ 就是方程(8.9)所給的燃氣通過時間． 這樣一來，連系 $\varphi$, $\mu$ 與 $\kappa$ 的無量綱方程就是

$$\begin{aligned} P\left\{1 + \alpha E\left(P + \frac{1}{2}\right)\frac{d}{dz} + \frac{1}{2}JE\frac{d^2}{dz^2}\right\}\varphi + \left\{\left[1 + \alpha\left(P + \frac{1}{2}\right)\right]\right. \\ \left. + \left[\alpha E\left(P + \frac{1}{2}\right) + J\right]\frac{d}{dz} + \left[\frac{1}{2}\alpha JE\left(P + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}JE\right]\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{4}J^2E\frac{d^3}{dz^3}\right\}\mu \\ + \left\{\alpha\left(P + \frac{1}{2}\right)\frac{d}{dz} + J\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2}\alpha JE\left(P + \frac{1}{2}\right)\frac{d^3}{dz^3} + \frac{1}{4}J^2E\frac{d^4}{dz^4}\right\}\kappa = 0, \end{aligned} \tag{8.27}$$

這裏的 $z$ 就是方程(8.9)所定義的無量綱時間變數。

伺服控制的動力學性質是由下列各種因素的綜合所確定的：測量壓力的儀器的特性，放大器的反應性能以及伺服機構的特性．伺服控制的總的動力學性質是由下列運算子方程所表示的：

$$F\left(\frac{d}{dz}\right)\varphi = \kappa, \tag{8.28}$$

這裏的 $F$ 是兩個多項式的比值，而且分母的次數高於分子的次數．

方程(8.7)，(8.27)與(8.28)是三個變數 $\varphi$, $\mu$, $\kappa$ 的三個方程． 既然，它們都是常系數的方程，這些變數的適當的形式就是

$$\varphi = ae^{sz}, \quad \mu = be^{sz}, \quad \kappa = ce^{sz}. \tag{8.29}$$

把方程(8.29)代入方程(8.7),(8.27)和(8.28),就得到 $a, b, c$ 的三個齊次方程.所以我們有

$$a[s+(1-n)+ne^{-\delta s}]-be^{-\delta s}=0,$$

$$\begin{aligned} &P\left\{1+\alpha E\left(P+\frac{1}{2}\right)s+\frac{1}{2}JEs^2\right\}a+\left\{\left[1+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)\right]\right.\\ &\quad+\left[\alpha E\left(P+\frac{1}{2}\right)+J\right]s+\left[\frac{1}{2}\alpha JE\left(P+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}JE\right]s^2\left.+\frac{1}{4}J^2Es^3\right\}b\\ &\quad+s\left\{\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)+Js+\frac{1}{2}\alpha JE\left(P+\frac{1}{2}\right)s^2+\frac{1}{4}J^2Es^3\right\}c=0, \end{aligned}$$

$$F(s)a-c=0.$$

為了使 $a, b, c$ 三個數不全是零,它們的系數所組成的行列式就必須等於零. 這個條件可以寫在下面:

$$\begin{aligned} &[s+(1-n)]\left\{\frac{1}{4}J^2Es^3+\frac{1}{2}JE\left[1+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)\right]s^2\right.\\ &\quad\left.+\left[\alpha E\left(P+\frac{1}{2}\right)+J\right]s+\left[1+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}\\ &\quad+e^{-\delta s}\left[\frac{1}{4}nJ^2Es^3+\left\{\frac{1}{2}nJE\left[1+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}JEP\right\}s^2\right.\\ &\quad+\left\{n\left[\alpha E\left(P+\frac{1}{2}\right)+J\right]+\alpha EP\left(P+\frac{1}{2}\right)\right\}s\\ &\quad+\left\{n\left[n+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)\right]+P\right\}\\ &\quad\left.+sF(s)\left\{\frac{1}{4}J^2Es^3+\frac{1}{2}\alpha JE\left(P+\frac{1}{2}\right)s^2+Js+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)\right\}\right]=0. \end{aligned} \tag{8.30}$$

這就是用來確定指數 $s$ 的方程. 現在 $F(s)$ 就被認爲是反饋部分的總傳遞函數. 整個系統是否穩定的問題就決定於方程(8.30)有沒有實數部分是正數的根.

## 8.4 沒有反饋伺服機構時的不穩定性

如果沒有反饋伺服機構,那末,只要在基本方程(8.30)中使 $F(s)=0$, 就得出系統的特性方程. 和通常的情况一樣,我們假設方程(8.30)中與 $e^{-\delta s}$ 相乘的那個多項式在右半 $s$ 平面沒有零點. 因此,就可以用那個多項式除方程(8.30)而不會使除得的商數在右半 $s$ 平面上有極點. 這樣一來,就又得到描畫薩奇圖所需要的表示式:

$$G(s)=g_1(s)-g_2(s),\quad g_1(s)=e^{-\delta s},$$

所以 $g_1(s)$ 的圖綫仍然是一個"單位圓",然而 $g_2(s)$ 就複雜得多了:

$$\begin{aligned} g_2(s)=&\left(\frac{s}{n}+\frac{1-n}{n}\right)\left\{\frac{1}{4}J^2Es^3+\frac{1}{2}JE\left[1+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)\right]s^2\right.\\ &\left.+\left[\alpha E\left(P+\frac{1}{2}\right)+J\right]s+\left[1+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}\\ &\div\left[\frac{1}{4}J^2Es^3+\frac{1}{2}JE\left\{1+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)+(P/n)\right\}s^2\right.\\ &\left.+\left\{\alpha E\left(P+\frac{1}{2}\right)[1+(P/n)]+J\right\}s+\left\{1+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)+(P/n)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{8.31}$$

如果 $s$ 是純虛數，$s=i\omega$，那末，$g_2(s)$ 的圖綫在 $x$ 軸上的"截距"的坐標就是方程(8.31)在 $s=0$ 時的值．也就是

$$g_2(0)=-\frac{1-n}{n}\frac{1+\alpha(P+\frac{1}{2})}{1+\alpha(P+\frac{1}{2})+(P/n)}. \tag{8.32}$$

因爲 $n$，$\alpha$ 和 $P$ 這三個參數都是正數，所以現在的 $g_2(0)$ 的絕對值小於方程(8.14)所給的 $g_2(0)$ 的絕對值，我們已經知道那個 $g_2(0)$ 的值是與系統的無條件穩定性有關係的．現在我們就看到，由於有了燃料餽送系統，結果就使得薩奇圖的 $g_2(s)$ 圖綫更接近於 $g_1(s)$ 的單位圓圖綫．譬如說，如果不考慮餽送系統，那末，當 $n=\frac{1}{2}$ 時，$g_2(s)$ 圖綫就剛好與相當於發動機本身的單位圓圖綫相切．但是，如果把餽送系統也考慮進去，$g_2(s)$ 圖綫就與單位圓相交了，而且，當時滯 $\delta$ 超過某一個有限的數值時，系統就失去穩定性．因此，餽送系統的影響總是不利於系統的穩定性的．從方程(8.31)可得出對於 $s$ 的大的虛數值的漸近表示式(8.33)，考慮了這個表示式就會使我們更加確信上述的事實，

$$g_2(i\omega)\approx-\left[\frac{i\omega}{n}+\left(\frac{1+n}{n}-\frac{2P}{Jn^2}\right)+\cdots\right] \quad |\omega|\gg 1. \tag{8.33}$$

因此，對於 $s$ 的大虛數值來說，$g_2(s)$ 漸近地趨近於一條平行於虛軸的直綫，這條直綫在虛軸的左方，與虛軸的距離是

$$\frac{1-n}{n}-\frac{2P}{Jn^2}.$$

所以，還是可以看到，餽送系統的作用是使 $g_2(s)$ 圖綫更接近單位圓．

這樣就很明顯，如果參數 $n$ 差不多等於 $\frac{1}{2}$，或者大於 $\frac{1}{2}$，就不可能把系統設計成無條件穩定的，因爲在沒有反饋伺服機構的情況下，$g_1(s)$ 圖綫與 $g_2(s)$ 圖綫總是相交的．

## 8.5 有反饋伺服機構時的系統的穩定性

設 $H(s)$ 是方程(8.30)中與 $e^{-\delta s}$ 相乘的那個多項式，

$$\begin{aligned}H(s)=&\frac{1}{4}J^2Es^3+\left\{\frac{1}{4}JE\left[1+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)\right]+(JEP/2n)\right\}s^2\\&+\left\{\alpha E\left(P+\frac{1}{2}\right)+(\alpha EP/n)\left(P+\frac{1}{2}\right)\right\}s+\left\{1+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)+(P/n)\right\}\\&+[sF(s)/n]\left\{\frac{1}{4}J^2Es^3+\frac{1}{2}\alpha JE\left(P+\frac{1}{2}\right)s^2+Js+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)\right\},\end{aligned} \tag{8.34}$$

如果 $H(s)$ 在右半 $s$ 平面沒有零點或極點，只要使

$$g_1(s)=e^{-\delta s}$$

和

$$\begin{aligned}g_2(s)=&-\left(\frac{s}{n}+\frac{1-n}{n}\right)\left\{\frac{1}{4}J^2Es^3+\frac{1}{2}JE\left[1+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)\right]s^2\right.\\&\left.+\left[\alpha E\left(P+\frac{1}{2}\right)+J\right]s+\left[1+\alpha\left(P+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}\div H(s).\end{aligned} \tag{8.35}$$

那末，從這時的薩奇圖就可以判斷方程(8.30)在右半 $s$ 平面有沒有零點．

當 $s$ 在圖 4.4 所畫的路綫上轉動的時候，$g_1(s)$ 的圖綫仍然是一個單位圓．因此，如

果相應的 $g_2(s)$ 圖綫完全在單位圓的外面，方程(8.30)就不會在右半 $s$ 平面上有根．換句話說，如果在設計伺服控制部分的傳遞函數 $F(s)$ 的時候，使 $g_2(s)$ 圖綫完全在單位圓的外面(圖 8.4)，那末，對於任何的時滯值，系統都是穩定的．

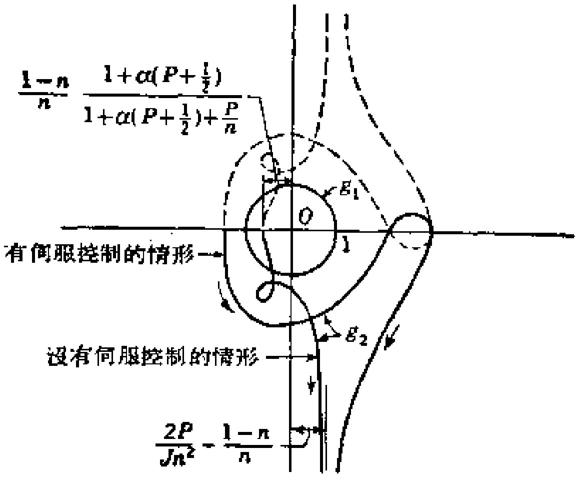



圖 8.4

作爲一個例子，我們取

$$n=\frac{1}{2},\quad P=\frac{3}{2},$$
$$J=4,\quad E=\frac{1}{4},$$
$$\alpha=1.$$

$\alpha$ 的數值相當於燃料泵是一個離心泵的情形．如果沒有伺服控制，$g_2(s)$ 就是

$$g_2(s)=-\frac{1}{2}\frac{(2s+1)(2s^3+3s^2+9s+6)}{s^3+3s^2+6s+6}.$$

主要的興趣在於 $s$ 取純虛數 $i\omega$ ($\omega$ 是實數)時的 $g_2(s)$ 的變化情况．因而

$$g_2(i\omega)=-\frac{1}{2}\frac{(6-21\omega^2+4\omega^4)(6-3\omega^2)+\omega^2(21-8\omega^2)(6-\omega^2)}{(6-3\omega^2)^2+\omega^2(6-\omega^2)^2}$$
$$-\frac{1}{2}i\omega\frac{(21-8\omega^2)(6-3\omega^2)-(6-21\omega^2+4\omega^4)(6-\omega^2)}{(6-3\omega^2)^2+\omega^2(6-\omega^2)^2}.$$

圖 8.5 中畫出了這條圖綫的 $\omega>0$ 的部分．可以明顯地看到，如果時滯的值足够大，系統就會不穩定．從另一方面來看，如果考慮了伺服控制，而且假設 $g_2(s)$ 能够相應地變爲

$$g_2(s)=-2\frac{(s+2)(s+3)}{(s+6)},$$

那末，正如圖 8.5 所畫的那樣，新的 $g_2(s)$ 圖綫就完全在 $g_1(s)$ 的單位圓圖綫的外面，因而，現在的系統就是無條件穩定的．根據方程(8.31)和方程(8.35)直接加以計算，就知道反饋部分的傳遞函數 $F(s)$ 應當是

$$F(s)=-4.875\frac{(s+1.0528)(s^2+0.7164s+2.6304)}{s(s+2)(s+3)(s+0.5332)(s^2+0.4668s+3.7511)},$$

所以，反饋部分具有 3.3 節討論過的積分綫路的那種特性．如果測量燃燒室壓力的傳感器的反應性能和帶動控制容器的伺服機構的特性都已經給定了，那末，我們就可能設計出一個放大器，使得總的傳遞函數接近於上面提到的傳遞函數 $F(s)$，用這個伺服控制系統就可以使燃燒過程得到穩定．

作爲第二個例子，我們取

$$n=\frac{1}{2},\quad P=\frac{3}{2},\quad J=4,\quad E=\frac{1}{4},\quad \alpha=0.$$

因爲 $\alpha=0$，所以燃料泵的出口壓力 $p_0$ 是一個常數，即使燃料流出的速率變化的時候 $p_0$ 也不會變動．這就相當於簡單的增壓裝置的情形．如果沒有反饋伺服機構

$$g_2(s) = -\frac{1}{2}\frac{(2s+1)(2s^3+s^2+8s+2)}{s^3+2s^2+4s+4}.$$

當 $s$ 是純虛數時,

$$g_2(i\omega) = -\frac{1}{2}\frac{(4-2\omega^2)(2-17\omega^2+4\omega^4)+\omega^2(4-\omega^2)(12-4\omega^2)}{(4-2\omega^2)^2+\omega^2(4-\omega^2)^2}$$
$$-\frac{1}{2}i\omega\frac{(4-2\omega^2)(12-4\omega^2)-(4-\omega^2)(2-17\omega^2+4\omega^4)}{(4-2\omega^2)^2+\omega^2(4-\omega^2)^2}.$$

這條 $g_2$ 的圖綫被畫在圖 8.6 上。很明顯,如果沒有伺服控制,而且時滯 $\delta$ 的值也足够大,燃燒就會是不穩定的。事實上,這個系統的穩定性能還不如前一個例子的系統好:也就是說,對於比較小的時滯值這個系統就會變為不穩定的。$g_2$ 圖綫在 $\omega=2$ 點附近的部分是特别有趣味的。在 $\omega=2$ 附近 $g_2$ 圖綫與 $g_1$ 的單位圓圖綫非常接近,如果時滯 $\delta$ 的值又能使得在 $\omega\sim 2$ 時,$g_1(i\omega)$ 與 $g_2(i\omega)$ 也相當接近 $g_1(i\omega)\sim g_2(i\omega)$,那末,在 $\omega\sim 2$ 處就會發生一個幾乎不衰減的振盪。這個臨界的 $\delta$ 值顯然小於那個由 $g_2$ 與單位圓在 $\omega\sim 0.65$ 的實在的交點所確定的時滯 $\delta$ 的臨界值。

為了實現無條件的穩定性,必須把 $g_2$ 圖綫移出單位圓,譬如說,如果希望把 $g_2$ 也變為與第一個例子中的那個圖綫完全相同的"穩定"的圖綫,

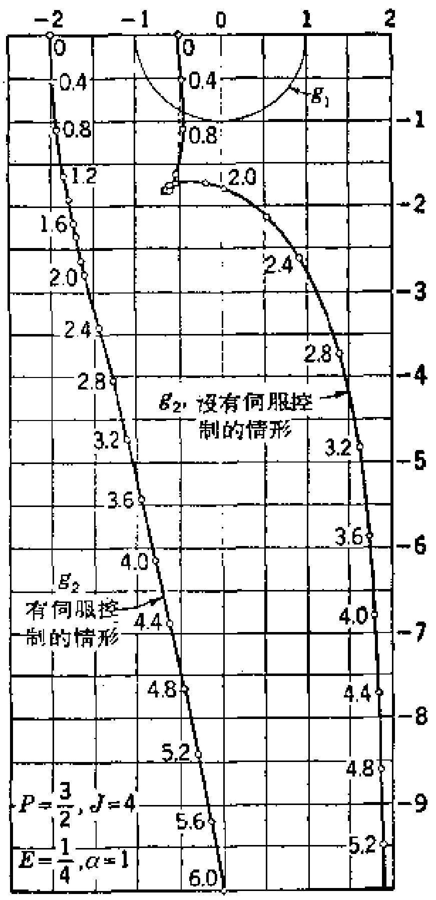



圖 8.5

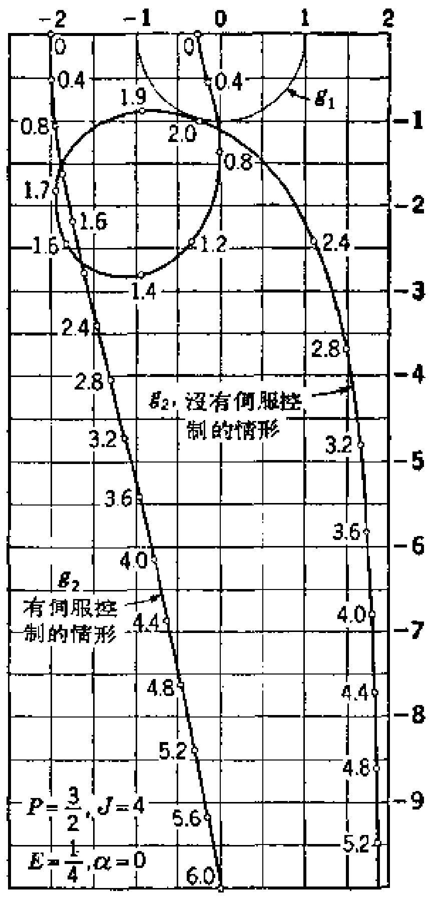



圖 8.6

$$g_2(s) = -2\frac{(s+2)(s+3)}{s+6}.$$

計算的結果表明：傳遞函數 $F(s)$ 就必須是

$$F(s) = -4.875\frac{(s+0.8126)(s^2-0.04337s+2.6506)}{s^2(s+2)(s+3)(s^2+4)}.$$

所以，反饋部分必須具有二重積分綫路那樣的特性．而且，傳遞函數在 $\mp 2i$ 有兩個純虛數的極點．因爲我們在原有的系統中忽略了導管的摩擦阻尼的作用，所以在這裏才對放大器發生了這個不現實的要求．在任何一個實際的系統中，導管的摩擦阻尼作用必然會把所需要的傳遞函數 $F(s)$ 中的這兩個純虛數極點消除掉．並且把它們變爲兩個複共軛的極點．

必須强調指出，利用反饋伺服機構來穩定燃燒過程的作法的優點就是：由於反饋伺服機構的可變化性很大，對於任何的時滯 $\delta$ 或 $\tau$ 的值，我們都可以使系統無條件地穩定．既然我們沒有關於時滯的準確的數據，所以，這個實現無條件穩定性的可能性對於工程實際來說確實是十分重要的．不但如此，如果要求在參數 $n$ 發生任何的變化的情况下系統都是穩定的，我們也可以用以上這種伺服穩定的方法進行設計．由於物理學的理由，$n$ 可以取 $\frac{1}{2}$ 與 1 之間的一個值．我們來處理最壞的可能性 $n\approx 1$，並且在這種情形下進行設計，使系統是無條件穩定的．這樣設計出來的系統對於所有可能的 $n$ 的值，當然都是穩定的．因此，即使不知道系統的確切的參數值，我們也還能保證反饋伺服機構的穩定作用．

## 8.6 時滯系統的穩定性的一般判斷準則

在以前的伺服穩定作用的討論中，我們都假定方程(8.34)的多項式 $H(s)$ 在右半 $s$ 平面上沒有零點和極點．然而，事實並不一定是這樣的．所以，首先我們應該研究 $H(s)$ 在右半 $s$ 平面的零點和極點的個數．爲了這個目的，我們應該先承認方程(8.34)中 $F(s)$ 的乘積前面的那個多項式在右半 $s$ 平面上通常是沒有零點的．因此，我們就可以研究 $H(s)$ 與那個多項式的比值，而不去直接研究 $H(s)$ 本身．這也就是說，$H(s)$ 在右半 $s$ 平面上的零點和極點的個數與下列函數在右半 $s$ 平面的零點和極點的個數是相同的：

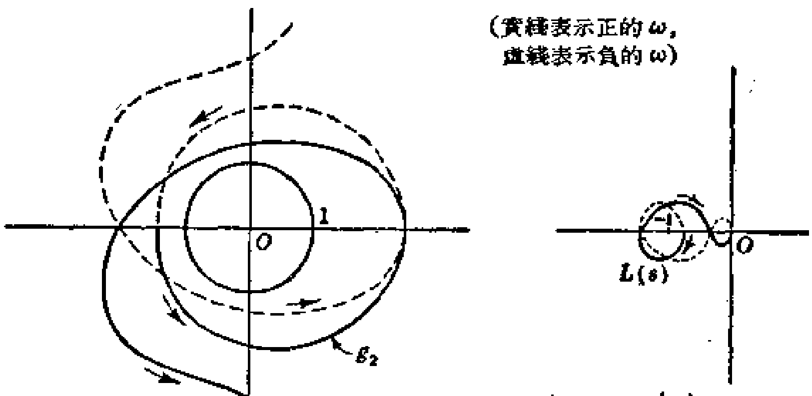
$$\begin{aligned} H(s) \div \Big[\frac{1}{4}J^2Es^3 &+ \Big\{\frac{1}{2}JE\Big[1+\alpha\Big(P+\frac{1}{2}\Big)\Big] + (JEP/2n)\Big\}s^2 \\ &+ \Big\{\alpha E\Big(P+\frac{1}{2}\Big) + (\alpha EP/n)\Big(P+\frac{1}{2}\Big)\Big\}s \\ &+ \Big\{1+\alpha\Big(P+\frac{1}{2}\Big)+(P/n)\Big\}\Big] = 1 + L(s), \end{aligned} \tag{8.36}$$

其中

$$\begin{aligned} L(s) = \frac{1}{n}sF(s)\Big[\frac{1}{4}J^2Es^3 &+ \frac{1}{2}\alpha JE\Big(P+\frac{1}{2}\Big)s^2 + Js + \alpha\Big(P+\frac{1}{2}\Big)\Big] \\ &\div \Big[\frac{1}{4}J^2Es^3 + \Big\{\frac{1}{2}JE\Big[1+\alpha\Big(P+\frac{1}{2}\Big)\Big] + (JEP/2n)\Big\}s^2 \\ &+ \Big\{\alpha E\Big(P+\frac{1}{2}\Big) + (\alpha EP/n)\Big(P+\frac{1}{2}\Big)\Big\}s \\ &+ \Big\{1+\alpha\Big(P+\frac{1}{2}\Big)+(P/n)\Big\}\Big]. \end{aligned} \tag{8.37}$$

按照乃氏準則，讓 $s$ 沿着圖 4.4 的曲綫轉動一周，畫出相當於 $1+L(s)$ 的乃氏圖，這樣就可以確定 $1+L(s)$ 在右半 $s$ 平面的零點和極點的個數．具體地說，如果 $1+L(s)$ 或 $H(s)$ 在右半 $s$ 平面上有 $r$ 個零點和 $q$ 個極點，那末，當 $s$ 沿着大半圓周轉動一周的時候，$L(s)$ 圍繞 $-1$ 點轉動的總圈數就是 $r-q$．所以，只要畫出 $L(s)$ 的乃氏圖就可以得到關於 $H(s)$ 的必要的資料．

爲了得到方程(8.35)所表示的 $g_1(s)$ 和 $g_2(s)$，就要用 $H(s)$ 去除方程(8.30)，這樣作的結果就在右半 $s$ 平面上引進了 $q$ 個零點和 $r$ 個極點．因爲方程(8.37)的分母多項式在右半 $s$ 平面上沒有零點．所以，$L(s)$ 的 $q$ 個極點一定都是 $F(s)$ 的極點．於是，方程(8.30)中的原來的表示式在右半 $s$ 平面上也就有 $q$ 個極點．因此，如果要求方程(8.30)中的原來的表示式在右半 $s$ 平面沒有零點，$g_2(s)$ 就一定要圍繞單位圓以順時針方向旋轉 $-q+(q-r)=-r$ 圈．如果要求系統無條件地穩定，也就是對於所有的時滯值都穩定，$g_2(s)$ 圖綫就永遠不應該與單位圓相交．所以，無條件穩定的一般準則就是：當 $s$ 在包圍右半 $s$ 平面的路綫上轉動一周時，第一、$g_2(s)$ 圖綫必須完全在單位圓的外面，第二、$g_2(s)$ 圖綫以逆時針方向圍繞單位圓旋轉 $r$ 圈．這就是用薩奇圖來表示的穩定性判斷準則．爲了確定 $r$，就必須用到方程(8.37)的 $L(s)$ 的乃氏圖．所以，爲了解决一般情况下的穩定性問題，薩奇圖和乃氏圖都是要用到的(圖 8.7)．




(b)
穩定的薩奇圖

(a)
1+L(s) 在右半 S 平面
有兩個零點的 L(s) 的
乃氏圖

圖 8.7

顯然，這裏所講的把薩奇圖和乃氏圖結合起來的穩定性準則，對於任意一個有時滯 $\tau$ 的系統都是適用的．這一類系統的穩定性問題總是可以化爲這樣一個問題：確定方程

$$M(s)=0$$

是否有實數部分是正數的根．這裏的 $M(s)$ 中包含有 $e^{-Ts}$ 因數的項．正像以前的討論中所看到的那樣，作法的原則就是把 $M(s)$ 用 $M(s)$ 裏的 $e^{-Ts}$ 的系數除，從而得出

$$\frac{M(s)}{1+L(s)}=G(s)=g_1(s)-g_2(s),$$

而且

$$g_1(s) = e^{-\tau s}.$$

當 $s$ 在圖 4.4 所畫的右半圓路綫上轉動的時候，$g_1(s)$ 和 $g_2(s)$ 的圖綫就構成薩奇圖，$g_1(s)$ 的圖綫是單位圓．用 $1 + L(s)$ 除 $M(s)$ 的手續可能在薩奇圖中引進若干個正實數部分的零點，為了判明這個情況，我們必須畫出 $L(s)$ 的乃氏圖． 然後，根據柯西定理就可以確定 $M(s) = 0$ 在右半 $s$ 平面上的根的個數．

函數 $g_2(s)$ 裏包含有反饋部分的傳遞函數，反饋部分中的放大器是可以由設計者自由處理的．由於系統的其他部分的原因，$g_2(s)$ 裏也可能包含有 $s$ 的超越函數． 因為，反饋部分的放大器的傳遞函數通常都是兩個多項式的比值，所以很難把來源於超越函數的損害穩定性的不良影響完全補償掉． 可是，在薩奇圖中 $g_2(s)$ 圖綫上最危險的部分就是最接近 $g_1(s)$ 的單位圓圖綫的那一部分，然而，接近單位圓的 $g_2(s)$ 點通常都是相應於小的 $s$ 值的，所以在 $g_2(s)$ 的危險的部分上超越函數可以展開為 $s$ 的泰勒級數． 我們可以只取級數的少數幾項作為超越函數的近似值[1]，並且根據這個近似的結果來設計反饋部分的放大器． 這樣一來系統在危險部分的損害穩定性的不良影響就可以被放大器補償掉．不言而喻，最後還必須根據放大器的設計特性用已有的穩定性準則校驗系統的性能．以上所講的方法是馬伯爾(F. E. Marble)和柯克司(D. W. Cox)．所提出的． 如果想知道詳細的論述，讀者可以去參閱原著[2]．

1) 關於這種方法可以參閱[22]．

2) F. E. Marble and D. W. Cox, *J. Am. Rocket Soc.*, **23**, 75—81 (1953)

# 第九章

# 平穩隨機輸入下的綫性系統

在以前各章裏，系統的輸入都被認爲是可以確切知道的時間函數。但是，在很多關於常系數綫性系統的工程問題中，關於輸入信號的知識並不是十分確切肯定的。例如，由於空氣的湍流而在飛機的機翼結構內引起的運動和應力的問題就屬於這一類工程問題。在這個例子裏，可以把隨時間變化的氣流狀態看作是系統的輸入。這種氣流狀態不可能用一個確切的時間函數來描述，這類不能完全確切知道的過程稱爲隨機過程，用來表示隨機過程的時間函數就稱爲隨機函數，這種隨機函數只能用某些統計的特性加以描述。如果機翼的應力是系統的輸出，那末，這個輸出也一定是一個隨機函數而且也只能用統計的方式給予描述。

這一章的第一個目的就是要找出一個方便的計算方法，利用這個方法就可以根據輸入的已知的統計性質算出輸出的統計性質。這是從前朗日萬(P. Langevin)關於布朗運動的研究工作的一個簡單的推廣。

隨機輸入的另一個例子就是控制信號中的所謂噪聲。噪聲是由於設計者所無法控制的外界干擾和信號的微弱波動所引起的。噪聲問題是一個與通信工程相聯系的範圍很廣的研究題目。它的中心問題是如何設計一個系統，使得無法避免的噪聲的影響被減少到最低限度而信號的有用信息不受到破壞。我們將要在第十六章中討論這個特殊問題。在目前這一章裏，問題的性質是有些不同的，在我們現在所要討論的問題中，隨機的輸出是系統僅有的輸出。我們對於系統設計，特別是對於反饋伺服系統的設計所提出的要求就是：對於給定的輸入而言，輸出應該具有使人滿意的統計性質(概率性質)。我們將會看到，以前各章中所用的傳遞函數的方法對於解決這個問題仍然是有用的。

## 9.1 隨機函數的統計描述方法

我們來考慮一個產生隨機函數 $y_1(t)$ 的系統。現在，爲了建立這樣一個隨機函數的統計描述的概念，我們必須考慮很多個與第一個系統相同的系統。這些系統的總體稱爲一個系集，組成系集的每一個個別的系統稱爲一個元素。設系集的各個元素所產生的隨機函數分別是 $y_1(t), y_2(t), y_3(t), \cdots$。雖然這些元素都是相同的系統，但是，某一個元素所產生的隨機函數在任意一個確定的時刻 $t$ 的值與其他元素在同一時刻的隨機函數值一般說來是不同的，也就是說：$y_m(t) \neq y_n(t)\ (m \neq n)$。從這個事實就可以看出這些函數的統計性的性質。雖然如此，我們還是可以問這樣一個問題：如果給定一個從 $y$ 到 $y+dy$ 的間隔(也就是在 $y$ 和 $y+dy$ 之間的所有實數)，那末，函數值在這個間隔之內的 $y(t)$ 的個數佔系集的元素的總數的百分之幾？這個百分數是與 $y$ 和 $t$ 有關的，而且當 $dy$ 很小的時候，這個百分數與 $dy$ 成正比。這個百分數也就是在時刻 $t$ 時，$y(t)$ 在 $y$ 和 $y+dy$

之間的概率，可以把這個概率寫作 $W_1(y, t)dy$. $W_1(y, t)$ 這個函數稱爲隨機函數 $y(t)$ 的第一概率分佈函數. 現在我們再來考慮在兩個給定的時刻 $t_1$ 和 $t_2$ 的 $y(t)$ 的值. $t_1$ 時函數值在 $y_1$ 與 $y_1 + dy_1$ 之間，以及 $t_2$ 時函數值在 $y_2 + dy_2$ 之間的 $y(t)$ 的個數佔 $y(t)$ 的總數（也就是系集的元素的個數）的百分數可以寫作 $W_2(y_1, t_1; y_2, t_2)\, dy_1\, dy_2$. 函數 $W_2(y_1, t_1; y_2, t_2)$ 稱爲隨機函數 $y(t)$ 的第二概率分佈函數. 我們也可以用類似的方法定義次數更高的概率分佈函數.

如果採用以上的方法，就必須先同時對大量的相同的系統進行觀測，然後才能利用觀測的結果作出隨機函數 $y(t)$ 的統計描述，因爲進行這樣的觀測有很多實際的困難，所以，以上的方法是很不能使人滿意的. 但是，如果隨機函數是一個平穩的隨機函數，也就是說，隨機函數的所有的統計性質都是與時間無關的，那末，由數目龐大的相同的系統所組成的系集就是不必需的了，我們只要對單獨一個系統進行很長時間的觀測，就可以得出所有必需的觀測結果. 這時，我們可以把觀測的記錄曲綫，分割成時間長度是 $\theta$ 的許多段落，$\theta$ 要比隨機函數的特徵時間大得多. 這裏所謂的特徵時間就是這樣一個時間長度：在這樣長的時間間隔中，隨機過程的統計性質能够相當充分地表現出來. 既然，對於平穩的隨機過程來說，測量時間的起點的選擇對問題不起作用，所以，每一段記錄都包含有關於系統的運動狀態的同樣的統計資料. 因此，這許多不同的段落就可以看作是在許多相同的系統上（也就是在一個系集上）所作的觀測記錄的總體. 因而也就能够把各次的概率分佈函數確定下來. 不僅如此，這些概率分佈函數也變得更簡單了：$W_1$ 就不再與時間 $t$ 有關了；$W_2$ 也只與 $\tau = t_2 - t_1$ 這個時間長度有關，而與 $t_1, t_2$ 本身無關了. 所以，對於平穩隨機函數來說，$y(t)$ 在 $y$ 與 $y + dy$ 之間的概率是 $W_1(y)dy$；$y(t)$ 在 $y_1$ 與 $y_1 + dy_1$ 以及 $y(t+\tau)$ 在 $y_2$ 與 $y_2 + dy_2$ 之間的概率就是 $W_2(y_1, y_2; \tau)dy_1dy_2$. 因爲，在工程問題中，隨機函數常常可以看作是平穩的隨機函數，所以，在以下的討論中，我們只來考慮這種隨機函數.

必須強調指出：關於一個隨機函數的統計性質的全部資料就是由各次概率分佈函數具體表示出來的. 我們也可以這樣說：各次概率分佈函數就“確定”一個隨機函數. 根據概率的一些基本性質，這些分佈函數 $W_n$ 當然不可能是任意的，它們必須滿足以下的一些條件：

(a) $W_n \geq 0$；這是因爲概率不可能是負數的緣故.

(b) 對於各個變數 $y_i$ 來說，$W_n$ 是對稱的. 例如

$$W_2(y_1, y_2; \tau) = W_2(y_2, y_1, \tau). \tag{9.1}$$

$W_2$ 是一個聯合概率分佈函數，根據 $W_2$ 的意義來看，公式(9.1)是很明顯的.

(c) 次數較高的概率分佈函數能够導出次數較低的概率分佈函數；例如

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_2(y_1, y_2; \tau)dy_2 = W_1(y_1) = W_1(y), \tag{9.2}$$

這裏的積分運算是對於所有可能的 $y_2$ 值進行的. 值得注意的是：對 $y_2$ 的積分把 $\tau$ 也消去了. 公式(9.2)的第二個等式只是把 $W_1(y_1)$ 改寫爲普通的形式 $W_1(y)$ 而已. 此外，還

有

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_1(y)dy = 1. \tag{9.3}$$

這個公式只不過表示這樣一個顯然的事實：所有可能發生的情况的概率的總和必須是 1.

## 9.2 平均值

根據第一概率分佈函數 $W_1(y)$，可以求出 $y$ 的平均值 $\bar{y}$：

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} yW_1(y)dy \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} W_1(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} yW_1(y)dy. \tag{9.4}$$

既然，我們只限於考慮平穩隨機函數，所以，也可以用取時間平均值的方法得出 $\bar{y}$：

$$\bar{y} = \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} y(t)dt. \tag{9.5}$$

用公式(9.4)所求出的 $\bar{y}$ 稱為 $y$ 的系集平均值（或數學期望）. 系集平均值與時間平均值(9.5)相等是平穩隨機函數的一個重要特性. 在以後的計算中，我們將會經常用到這個性質.

可以把方程(9.4)推廣到 $y$ 的任意次方冪的情形上去，因而就有

$$m_n = \overline{y^n} = \int_{-\infty}^{\infty} y^n W_1(y)dy, \tag{9.6}$$

$m_n$ 稱為第一概率分佈函數的 $n$ 階矩. 根據一階矩和二階矩，我們就可以算出所謂的平均偏差 $\sigma$，$\sigma^2$ 稱為方差：

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \overline{(y-\bar{y})^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} (y-\bar{y})^2 W_1(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [y^2 - 2y\bar{y} + (\bar{y})^2] W_1(y)dy = \overline{y^2} - (\bar{y})^2,\end{aligned} \tag{9.7}$$

所以，平均偏差 $\sigma$ 是概率分佈函數的圖綫對於平均值 $\bar{y}$ 點的"寬度"的一種量度. 類似地，三階矩是概率分佈函數 $W_1(y)$ 的圖綫的（對於 $W_1$ 軸的）不對稱性的一種量度. 如果關於各階矩的情形知道得更多一些，那末，關於 $W_1(y)$ 的知識也就會更增加一些. 在某些情况下，關於各階矩的知識就能够把分佈函數完全確定. 例如，如果，已經知道

$$\left.\begin{aligned} m_{2k-1} &= 0 \\ m_{2k} &= 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\sigma^{2k} \end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$
$$k = 1, 2, \cdots,$$

那末，第一概率分佈函數 $W_1(y)$ 就是有名的高斯(Gauss)分佈或正態分佈：

$$W_1(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2\sigma^2}. \tag{9.9}$$

我們總是可以適當地選取 $y$ 坐標的原點使得 $\bar{y}$ 變為零，也就是說，可以使得原點是 $y$ 的平均值. 有時候，這種作法可以使問題的處理更加便利. 這樣作過以後，我們就說概率分佈函數已經被標準化了. 這時，從方程(9.7)可以看出，方差 $\sigma^2$ 就簡單地等於二階矩 $\overline{y^2}$.

由第二概率分佈函數 $W_2(y_1, y_2; \tau)$ 導出的各種平均值中，最重要的就是相關函數（或稱為關連函數）$R(\tau)$，$R(\tau)$ 的定義是

$$R(\tau)=\overline{y_1y_2}=\overline{y(t)y(t+\tau)}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y_1y_2W_2(y_1,y_2;\tau)dy_1dy_2. \tag{9.10}$$

對於一個平穩隨機函數來說，$R(\tau)$ 顯然也可以用對時間取平均值的方法得到：

$$R(\tau)=\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}\int_{-\theta/2}^{\theta/2}y(t)y(t+\tau)dt. \tag{9.11}$$

所以，$R(\tau)$ 就是兩個不同時刻的 $y$ 值的相關程度的一個量度．不難想到，當兩個時刻的間隔 $\tau$ 增大時，這個相關性或者"記憶力"就要相應地減弱．如果 $\tau$ 變得非常大，結果就會使 $y(t)$ 和 $y(t+\tau)$ 彼此無關了．在這種情況下，根據概率計算的原理，第二概率分佈函數就等於 $W_1(y_1)$ 與 $W_2(y_2)$ 的乘積．所以，對於很大的 $\tau$ 來說，

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y_1y_2W_1(y_1)W_2(y_2)dy_1dy_2=(\bar{y})^2. \tag{9.12}$$

如果 $\tau=0$，由方程(9.11)顯然有

$$R(0)=\overline{y^2}. \tag{9.13}$$

既然，不論怎樣移動測量時間的原點，$R(\tau)$ 都不會改變，所以就有

$$R(\tau)=\overline{y(t)\,y(t+\tau)}=\overline{y(t-\tau)\,y(t)}.$$

如果我們先把這個方程對 $\tau$ 微分，然後再設 $\tau=0$，就得出

$$R'(0)=\overline{y(t)y'(t)}=-\overline{y(t)y'(t)},$$

因此

$$R'(0)=\overline{y(t)y'(t)}=0. \tag{9.14}$$

在這些方程中，撇號"′"表示對時間的微分．所以，一個平穩隨機函數和它的同一時刻的導數的"相關度"是零．這也就表示：在 $y$ 的記錄曲綫上，對於任意一個 $y$ 值來說，斜率是正數的概率與斜率是負數的概率相等．

如果我們把 $R(\tau)$ 對 $\tau$ 微分兩次，然後再設 $\tau=0$，就得

$$R''(0)=\overline{y(t)y''(t)}=-\overline{y'^2}. \tag{9.15}$$

根據這個公式我們就可以利用關連函數來計算 $y$ 的導數的平均平方值．類似地，$y$ 的二次導數的平均平方值也可以用下列公式計算：

$$R''''(0)=\overline{y''^2}. \tag{9.16}$$

同樣，我們可以證明：

$$R'''(0)=R^{\mathrm{V}}(0)=R^{\mathrm{VII}}(0)=\cdots=0.$$

所以，相關函數 $R(\tau)$ 可以寫成下列的泰勒級數：

$$R(\tau)=R(0)+\frac{\tau^2}{2!}R''(0)+\frac{\tau^4}{4!}R''''(0)+\cdots.$$

由此，又可以看出 $R(\tau)$ 是 $\tau$ 的偶函數，

$$R(\tau)=R(-\tau).$$

其實，根據 $R(\tau)$ 的意義，我們早就可以想到這個事實，所以這並不是新的結果．

## 9.3 功率譜

隨機函數的譜的概念對於隨機函數的理論的應用上具有很重要的意義．假設我們在一段很長的時間 $\theta$（$-\theta/2 < t < \theta/2$）裏對 $y(t)$ 進行了觀測．如果我們只考慮這一段時間裏的情況，把其餘時間的 $y(t)$ 看作是零．那末，$y(t)$ 就可以寫成富利埃積分[1]

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \tag{9.17}$$

這裏的 $A(\omega)$ 是表示相當於頻率 $\omega$ 的振幅（一般說來這個振幅是一個複數）．它可以用反轉公式由 $y(t)$ 計算出來：

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} y(t) e^{-i\omega t} dt. \tag{9.18}$$

如果用 $A^*(\omega)$ 表示 $A(\omega)$ 的複共軛數，因為 $y(t)$ 是實數，所以，由方程(9.18)就得出

$$A^*(\omega) = A(-\omega). \tag{9.19}$$

現在，我們就可以利用 $A(\omega)$ 來計算平均值 $\overline{y^2}$：

$$\overline{y^2} = \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} y^2(t) dt = \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} dt \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' A(\omega) A(\omega') e^{i(\omega+\omega')t}.$$

作變數變換 $\omega'' = -\omega'$，就得

$$\begin{aligned}\overline{y^2} &= \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega'' A(\omega) A^*(\omega'') \int_{-\theta/2}^{\theta/2} e^{i(\omega-\omega'')t} dt \\ &= \lim_{\theta\to\infty} \frac{2}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) A^*(\omega'') \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(\omega-\omega'')\theta\right]}{\omega-\omega''} d\omega d\omega''.\end{aligned}$$

如果我們再引進新變數 $\xi$，$\xi$ 的定義是

$$\xi = \frac{\theta}{2}(\omega - \omega''),$$

於是就又有

$$\omega'' = \omega - \frac{2\xi}{\theta}.$$

這樣一來，

$$\begin{aligned}\overline{y^2} &= \lim_{\theta\to\infty} \frac{2}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} A^*\left(\omega - \frac{2\xi}{\theta}\right) \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi \\ &= \left[\lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_{0}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega\right] 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi \\ &= 4\pi \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_{0}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega.\end{aligned}$$

所以，如果我們設

$$\Phi(\omega) = \lim_{\theta\to\infty} \frac{4\pi}{\theta} |A(\omega)|^2, \tag{9.20}$$

那末

1) 可以參閱 Whittaker and Watson, "Modern Analysis", 第 9.7 節, p. 188, Cambridge-Macmillan, 1943.（該文譯本[26]）.

$$\overline{y^2} = \int_0^\infty \Phi(\omega)d\omega. \tag{9.21}$$

$\Phi(\omega)$ 當然是一個實函數,而且 $\Phi(\omega)$ 就稱爲隨機函數 $y(t)$ 的功率譜. 根據方程(9.20)和(9.21),我們就可以由富利埃系數 $A(\omega)$ 算出平均值 $\overline{y^2}$. 這個關係就是巴塞伐(Parseval)定理.

我們再來考慮相關函數 $R(\tau)$. 把方程(9.11)和(9.17)合併起來,就得出

$$R(\tau) = \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}\int_{-\theta/2}^{\theta/2} y(t)y(t+\tau)dt$$
$$= \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)A(\omega')e^{i\omega\tau}d\omega d\omega'\int_{-\theta/2}^{\theta/2} e^{i(\omega+\omega')t}dt.$$

然後,用與以前類似的計算,就可以得到

$$R(\tau) = \int_0^\infty \Phi(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega. \tag{9.22}$$

設 $\tau = 0$, 就又可以從方程(9.21)和(9.22)得出方程(9.13)的結果. 把方程(9.22)先對 $\tau$ 微分,然後再設 $\tau = 0$,又可以得出方程(9.14)的結果. 根據富利埃積分的反轉定理,

$$\Phi(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \tag{9.23}$$

有了方程(9.22)和(9.23), 只要知道相關函數與功率譜二者之中的一個,就可以算出另一個來. 這兩個方程稱爲維納-辛欽(Wiener-Хинчин)關係.

功率譜 $\Phi(\omega)$ 裏可以包含以狄拉克 $\delta$ 函數[42](參看第 2.5 節)所表示的冲量. 當 $\bar{y}$ 不等於零的時候,或者用電工術語來說,有一個直流項的時候,情形就是這樣的,這時

$$\Phi(\omega) = 2(\bar{y})^2\delta(\omega) + \Phi_1(\omega), \tag{9.24}$$

這裏 $\delta(x)$ 是這樣定義的:

$$\left.\begin{aligned} &\text{如果 } x \neq 0, \quad \delta(-x) = \delta(x) = 0,\\ &\text{如果 } x = 0, \quad \delta(x) \to \infty,\\ &\text{而且有}\\ &\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1 \quad \text{以及} \quad \int_0^\infty \delta(x)dx = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{9.25}$$

對於純粹的"噪聲"來說,通常只在 $\omega = 0$ 處有一個相當於直流項的冲量. 因此 $\Phi_1(\omega)$ 就是一個表示眞正的連續譜的正則函數. 但是,也可能有這種情况:在噪聲中還夾雜有若干個有規律的正弦振盪. 在這種情形下,功率譜在相當於那些正弦振盪的若干個離散的頻率上也有冲量.

### 9.4 功率譜的例子

我們舉出兩個由相關函數計算功率譜的例子.

第一個例子:如果相關函數是以高斯曲綫給定的

$$R(\tau) = R(0)e^{-\alpha^2\tau^2}, \tag{9.26}$$

按照方程(9.23)相當的功率譜就是

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \frac{2}{\pi} R(0) \int_0^\infty \cos(\omega\tau) e^{-\alpha^2\tau^2} d\tau = \Phi(0) e^{-(\omega^2/4\alpha^2)},\\ \text{其中}\quad \Phi(0) &= \frac{R(0)}{\alpha\sqrt{\pi}}.\end{aligned}\right\} \tag{9.27}$$

有趣的事實是：當 $\alpha \to \infty$ 時，對於所有有限的 $\tau$ 來說，相關函數都趨近於零．同時，$R(0)$ 以一種使 $R(\tau)$ 變為 $\delta$ 函數的方式趨於 $\infty$．這也就是說，不同時刻的 $y(t)$ 值是毫無關連的．所以，這個隨機函數是所有隨機函數中"最雜亂無章"的一個．當 $\alpha \to \infty$ 時，功率譜是一個與頻率無關的常數．這個最雜亂的隨機函數稱為白色噪聲．常常用白色噪聲來描述物理系統中自然發生的隨機變化．

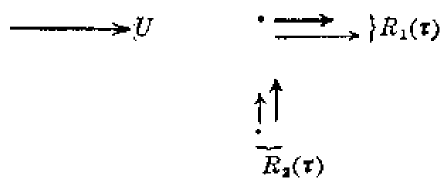



圖 9.1

第二個例子就是流體的勻速運動中的微小各向同性湍流．馮・卡爾曼(von Kármán)和霍瓦爾斯(L. Howarth)曾經證明[1]：基本的二階相關函數就是 $R_1(\tau)$ 和 $R_2(\tau)$：$R_1(\tau)$ 是在同一空間點上平行於平均流動方向的擾動速度分量對於時間間隔 $\tau$ 的相關函數；$R_2(\tau)$ 是與平均流動方向垂直的擾動速度分量的相當的關連函數．如果 $U$ 是平均速度，$L$ 是湍流的特性長度，那末，這兩個相關函數就可以近似地表示為

$$R_1(\tau) = R_1(0) e^{-\tau U/L}, \tag{9.28}$$

$$R_2(\tau) = R_2(0) e^{-\tau U/L}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\tau U}{L}\right). \tag{9.29}$$

根據方程(9.23)，平行於平均流動方向的擾動速度分量的功率譜 $\Phi_1(\omega)$ 和垂直於這個方向的擾動速度分量的功率譜 $\Phi_2(\omega)$ 就是

$$\Phi_1(\omega) = \Phi_1(0)\frac{1}{1 + (\omega L/U)^2}, \tag{9.30}$$

$$\Phi_2(\omega) = \Phi_2(0)\frac{1 + 3(\omega L/U)^2}{[1 + (\omega L/U)^2]^2}, \tag{9.31}$$

這裏的 $\Phi_1(0)$ 和 $\Phi_2(0)$ 是相當的功率譜在 $\omega = 0$ 處的值．它們與 $R_1(0)$ 和 $R_2(0)$ 的關係是

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(0) &= \frac{2}{\pi}\frac{L}{U} R_1(0),\\ \Phi_2(0) &= \frac{1}{\pi}\frac{L}{U} R_2(0).\end{aligned}\right\} \tag{9.32}$$

## 9.5 功率譜的直接計算

根據相關函數來計算功率譜的作法當然不是絕對必需的．有時候也可以根據隨機函數 $y(t)$ 本身的已知性質把功率譜直接計算出來．

例如，我們來考慮這樣一個情形：$y(t)$ 是一系列形狀相同的脈沖，脈沖的頻率是一個

1) von Kármán and Howarth, *Proc. Roy. Soc.* (A), **164**, 192 (1938).

常數,可是脈冲的高度是相當於某一個概率分佈函數的隨機函數。此外,還假定這一系列的脈冲高度是互不相關的。如果脈冲是矩形的,那末,這一系列脈冲就像圖 9.2 所畫的那樣。如果一個高度是一的脈冲的表示式是 $\eta(t)$,那末,

$$y(t) = \sum_k a_k \eta(t - kT), \tag{9.33}$$

其中 $T$ 是兩個相鄰脈冲之間的時間間隔,$a_k$ 是第 $k$ 個脈冲的高度。計算功率譜的第一個步驟就是按照方程(9.18)算出富利埃譜 $A(\omega)$。設 $\theta = 2NT$,就有

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-NT}^{NT} y(t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-NT}^{NT} \sum_k a_k\eta(t-kT)e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \sum_{-N}^{N} a_k e^{-i\omega kT}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi = \alpha(\omega)\sum_{-N}^{N} a_k e^{-i\omega kT},$$

這裏的 $\alpha(\omega)$ 是一個脈冲的富利埃譜,

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi. \tag{9.34}$$

例如脈冲是寬度是 $2\varepsilon$ 高度是一的矩形脈冲,

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-i\omega\xi}d\xi = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\omega\varepsilon}{\omega}. \tag{9.35}$$

根據方程(9.19)和(9.20),功率譜就是

$$\Phi(\omega) = \frac{4\pi}{T}|\alpha(\omega)|^2 \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N}\left[\sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N} a_k a_l e^{-i\omega(k-l)T}\right]. \tag{9.36}$$

為了簡便地進行方程(9.36)中的極限運算,我們先取整個方程的系集平均值。既然,系集的每一個組成元素的功率譜 $\Phi(\omega)$ 都是相同的,所以,取系集平均值時方程(9.36)的左端

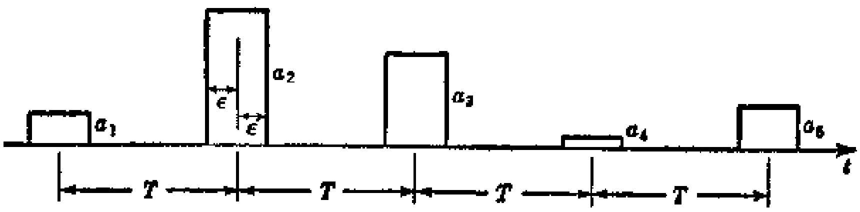



圖 9.2

並不改變。這樣一個取平均值的手續可以使方程(9.36)的右端得到簡化。設 $\bar{a}$ 是隨機變數 $a_k$(或 $a_l$)的平均值,$\overline{a^2}$ 是 $a_k$(或 $a_l$)的平方的平均值。把 $a_ka_l$ 寫成下列形式:

$$a_ka_l = (a_k - \bar{a})(a_l - \bar{a}) + \bar{a}[(a_k - \bar{a}) + (a_l - \bar{a})] + (\bar{a})^2.$$

我們把這個表示式代入方程(9.36)的右端,然後再取系集平均值。既然,這一系列脈冲的高度是互相無關的,所以,除非 $k = l$,$(a_k - \bar{a})(a_l - \bar{a})$ 的系集平均值就是零。如果 $k = l$,$(a_k - \bar{a})(a_l - \bar{a})$ 的系集平均值就是 $\overline{a^2} - (\bar{a})^2$。因此,極限號下的第一項就是

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N}\sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N}\overline{(a_k-\bar{a})(a_l-\bar{a})}e^{-i\omega(k-l)T} = \overline{a^2} - (\bar{a})^2.$$

$(a_k - \bar{a})$ 和 $(a_l - \bar{a})$ 的系集平均值顯然是零。所以,最後就有:

$$\Phi(\omega) = \frac{4\pi}{T}|\alpha(\omega)|^2\left\{[\overline{a^2} - (\bar{a})^2] + (\bar{a})^2\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N}\left|\sum_{-N}^{N} e^{-i\omega kT}\right|^2\right\}. \tag{9.37}$$

如果 $\omega = 2n\pi/T$ ($n$ 是整數)，方程(9.37)中的和數就等於 $2N+1$。因此，方程(9.37)的第二項的極限值是無限大。對於其他的 $\omega$ 值來說，這個和數的絕對值 $\left|\sum_{-N}^{N} e^{-i\omega kT}\right|$ 總是小於與 $N$ 無關的常數 $1 + 2\Big/\left|\sin\frac{\omega T}{2}\right|$，所以，當 $N\to\infty$ 時，方程(9.37)中極限值等於零。現在就很清楚，當取了極限值以後，第二項的性質就是在頻率 $\omega = 2n\pi/T$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$) 處的一系列冲量(或 $\delta$ 函數)。為了計算這些 $\delta$ 函數的系數，我們必須對於典型的間隔 $-\pi < \omega T < \pi$ 計算曲綫下方的面積。把和數加以積分，就得

$$\int_{-\pi/T}^{\pi/T} d\omega\, \frac{1}{2N}\left|\sum_{-N}^{N} e^{-i\omega kT}\right|^2 = \frac{1}{2N}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{1-\cos(2N+1)\omega T}{1-\cos\omega T}\,d\omega = \frac{2\pi}{T}\,\frac{2N+1}{2N}.$$

當 $N\to\infty$ 時，這個面積就得出的值 $2\pi/T$。按照方程(9.25)，$\delta$ 函數曲綫下的面積是一，所以，所需要系數就是 $2\pi/T$。因此，所考慮的平穩隨機函數(9.33)的功率譜最後就可以寫成

$$\Phi(\omega) = 2\omega_0\,|\alpha(\omega)|^2\left\{[\overline{a^2} - (\bar a)^2] + (\bar a)^2\omega_0\sum_{n=0}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0)\right\}, \tag{9.38}$$

其中 $\omega_0$ 是相當於基本周期 $T$ 的頻率，也就是

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \tag{9.39}$$

所以，$y(t)$ 的功率譜中包含有一個連續的部分，這一部分和一個單獨的脈冲的功率譜形狀相同。這一部分連續譜的强度是由脈冲高度的方差 $\sigma^2$ 所决定的。此外，在頻率 $n\omega_0$ ($n$ 是整數)處還有離散的譜，這一部分離散譜的强度也是由一個單獨脈冲的譜所决定的。

現在我們再來考慮另外一種情形。隨機函數 $y(t)$ 是一系列形狀和高度完全相同的脈冲。兩個相鄰脈冲的時間間隔是一個隨機函數，這個隨機函數的平均值是 $T$。第 $k$ 個脈冲的發生時間是 $kT + \epsilon_k$，這裏的 $T$ 是一個固定的常數。所以 $\epsilon_k$ 當然是一個隨機函數。假設 $\epsilon_k$ 按照一個已知的概率分佈函數 $P(\epsilon)$ 變化。並且假設 $\epsilon_k$ 的平均值是零。同時這些 $\epsilon$ 之間也是互不相關的。不難算出，兩個相鄰脈冲之間的時間間隔的平均值 $\overline{kT + \epsilon_k - (k-1)T - \epsilon_{k-1}} = \overline{T + \epsilon_k - \epsilon_{k-1}} = T$。如果脈冲都是矩形的，圖 9.3 所表示的就是一個這樣的隨機函數。

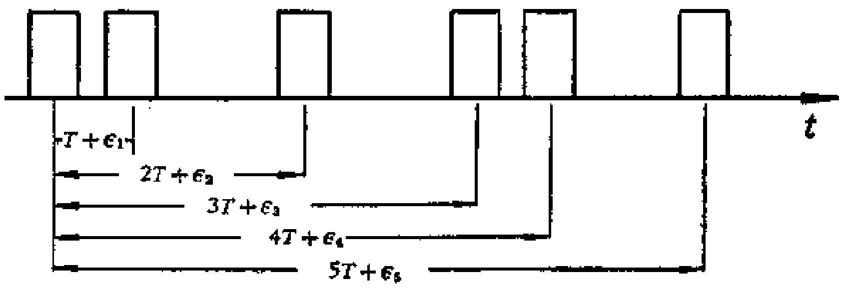



圖 9.3

一個這樣的隨機函數可以用下列公式表示：

$$y(t) = \sum_k \eta(t - kT - \varepsilon_k), \tag{9.40}$$

這裏 $\eta(t)$ 表示一個單獨的脈冲．按照方程(9.18)，設 $\theta = 2NT$，

$$A(\omega) = \alpha(\omega) \sum_{-N}^{N} e^{-i\omega(kT+\varepsilon_k)},$$

$\alpha(\omega)$ 是由方程(9.34)所給的一個單獨脈冲的富利埃譜．對於矩形脈冲的特殊情形，$\alpha(\omega)$ 就是由方程(9.35)所表示的．按照方程(9.19)和(9.20)，$y(t)$ 的功率譜就是

$$\Phi(\omega) = \frac{4\pi}{T} |\alpha(\omega)|^2 \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \left[ \sum_{-N}^{N} \sum_{-N}^{N} e^{-i\omega\varepsilon_k} e^{+i\omega\varepsilon_l} e^{-i\omega(k-l)T} \right] \tag{9.41}$$

現在，我們引進一個函數 $\chi(\omega)$，

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\varepsilon) e^{-i\omega\varepsilon} d\varepsilon, \tag{9.42}$$

有時候 $\chi(\omega)$ 稱爲 $\varepsilon$ 的特徵函數．按照普通的定義，$\chi(\varepsilon)$ 就是 $P(\varepsilon)$ 的富利埃變換（富氏變換）[1]．我們把 $e^{-i\omega\varepsilon_k} e^{+i\omega\varepsilon_l}$ 寫成

$$e^{-i\omega\varepsilon_k} e^{+i\omega\varepsilon_l} = \{[e^{-i\omega\varepsilon_k} - \chi(\omega)] + \chi(\omega)\} \{[e^{+i\omega\varepsilon_l} - \chi^*(\omega)] + \chi^*(\omega)\},$$

其中 $\chi^*(\omega)$ 是 $\chi(\omega)$ 的複共軛函數，而且 $\chi^*(\omega) = \chi(-\omega)$．現在我們就把這個表示式代入方程(9.41)，接着就取這個方程的系集平均值．因爲這些 $\varepsilon$ 都是互不相關的，所以極限運算可以大爲簡化．最後的結果就是

$$\Phi(\omega) = 2\omega_0 |\alpha(\omega)|^2 \left\{ [1 - |\chi(\omega)|^2] + |\chi(\omega)|^2 \omega_0 \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \right\}, \tag{9.43}$$

這裏的 $\omega_0$ 就是方程(9.39)所定義的頻率．在這種情形下，連續譜的形狀和離散譜的强度不再是只由單獨脈冲的譜所决定的了，它們與 $\varepsilon$ 的特徵函數也有關係．

作爲直接計算功率譜的第三個例子，我們來考慮圖 9.4 所表示的平穩隨機函數 $y(t)$．這個函數在時間間隔 $T$ 中的值或者是 $+1$ 或者是 $-1$．這裏的 $T$ 不是常數，而是一個隨機函數．$T$ 的概率分佈函數 $P(T)$ 是已知的．不言而喻，$T \geq 0$．也還要指出：這一系列時間間隔 $T$ 是互不相關的．我們用 $T_k$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ 來表示第 $k$ 個時間間隔．假設時間間隔的平均值是 $\bar{T}$：

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} TP(T) dT. \tag{9.44}$$

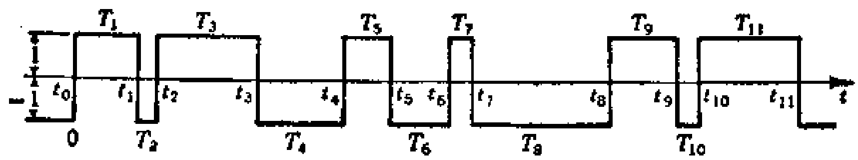



圖 9.4

我們把從 $t = 0$ 到 $t = N\bar{T}$ 取作方程(9.18)的積分間隔 $\theta$．這樣，就得到

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{N\bar{T}} y(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i\omega} \sum_{k=1}^{N} (-1)^k (e^{-i\omega t_k} - e^{-i\omega t_{k-1}}).$$

1）有時在富利埃變換的積分號前加一乘數 $1/2\pi$．

這裏的 $t_k$ 表示第 $k$ 個時間間隔的終點。以上的表示式又可以改寫爲

$$A(\omega)=\left[\frac{1}{\pi}\frac{1}{i\omega}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k e^{-i\omega t_k}\right]-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{i\omega}(-1)^N e^{-i\omega t_N}+\frac{1}{2\pi i\omega}.$$

於是，根據方程(9.20)我們就有下列的功率譜：

$$\Phi(\omega)=\frac{4}{\pi\bar{T}\omega^2}\left[\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{k'=1}^{N}(-1)^{k+k'}e^{-i\omega(t_k-t_{k'})}\right]. \tag{9.45}$$

我們來考慮 $k>k'$，譬如說 $k=k'+m$. 這時就有

$$e^{-i\omega(t_k-t_{k'})}=e^{-i\omega T_{k'+1}}e^{-i\omega T_{k'+2}}\cdots e^{-i\omega T_{k'+m}}. \tag{9.46}$$

既然，這一系列時間間隔是互不相關的，方程(9.46)的右端的乘積的發生概率就是每一個因子的發生概率的乘積. 如果我們引進 $T$ 的特徵函數 $\chi(\omega)$，

$$\chi(\omega)=\phi(\omega)+i\psi(\omega)=\int_0^\infty P(T)e^{-i\omega T}dT, \tag{9.47}$$

$\chi(\omega)$ 就是 $e^{-i\omega T}$ 的平均值. 因此，方程(9.46)的乘積的系集平均值也不過就是 $|\chi(\omega)|^m$. 在方程(9.45)的雙重和數中，這樣的乘積的個數的近似值就是 $N$. 每一個這種乘積的符號都是 $(-1)^m$. 所以，在極限值中，就有來源於這些乘積的一項 $(-1)^m[\chi(\omega)]^m$. $m$ 可以是從 1 到 $\infty$ 的所有正整數. 所以，這樣一些項的總和就是

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m[\chi(\omega)]^m=-\frac{\chi(\omega)}{1+\chi(\omega)}.$$

不難看出，來源於 $k'>k$ 的那些項的總和與來源於 $k>k'$ 的各項的總和剛好是複共軛的. 此外，很容易看出在方程(9.45)的方括弧裏的極限值中，來源於 $k=k'$ 各項的值就是 1. 這樣一來，這個極限值的所有的組成部分都已經知道了. 所以，就可以把方程(9.45)最後寫成

$$\Phi(\omega)=\frac{4}{\pi\bar{T}\omega^2}\left\{1-2\Re\left[\frac{\chi(\omega)}{1+\chi(\omega)}\right]\right\},$$

這裏的 $\Re$ 就是表示式的實數部分. 如果 $\chi(\omega)$ 的實數部分和虛數部分分別是 $\phi(\omega)$ 和 $\psi(\omega)$，就像方程(9.47)所寫的那樣，那末，$\Phi(\omega)$ 也就可以寫成

$$\Phi(\omega)=\frac{4}{\pi\bar{T}\omega^2}\frac{1-\phi^2(\omega)-\psi^2(\omega)}{[1+\phi(\omega)]^2+\psi^2(\omega)}. \tag{9.48}$$

如果分佈函數 $P(T)$ 是泊松(Poisson)分佈函數

$$P(T)=\frac{1}{\bar{T}}e^{-T/\bar{T}}, \tag{9.49}$$

這裏 $\bar{T}$ 就是方程(9.44)所定義的平均時間間隔. 對於這個特殊的分佈函數來說，這樣一個振幅是一的隨機開關函數的功率譜就是

$$\Phi(\omega)=\frac{\bar{T}}{\pi}\frac{1}{1+(\omega\bar{T}/2)^2}. \tag{9.50}$$

因爲這個隨機函數完全沒有任何有規則的周期性，所以功率譜是連續而且光滑的，以前兩個例子中所包含的那種沖量，在這裏是根本沒有的.

### 9.6 離開平均值的大偏差的概率

如果隨機函數是一個結構中的應力，那末，只知道這個應力的平均值是很不够的，因

為結構的破壞與應力本身的大小有關係.為了安全起見,我們就需要知道應力超過結構材料的容許工作應力的概率,也就是隨機函數 $y$ 的大小超過常數值 $k$ 的概率, $P[|y|\geqslant k]$ 如果第一概率分佈函數 $W_1(y)$ 是已知的,那末,這個問題的答案就很簡單:

$$P[|y|\geqslant k]=\int_{-\infty}^{-k}W_1(y)\,dy+\int_{k}^{\infty}W_1(y)dy. \tag{9.51}$$

但是,在不少工程問題中並不知道概率分佈函數,只能知道平均值 $\bar{y}$ 和方差 $\sigma^2$. 然而就是在這種限制很大的情況下,對於離開平均差的大偏差的概率,我們還是可能給出一個一般的估計,但是這個估計是偏於寬鬆的. 譬如說,如果 $g(y)$ 是 $y$ 的一個非負函數,按照定義 $W_1(y)$ 當然也是非負的,所以

$$\overline{g(y)}=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)W_1(y)dy\geqslant K\int_{g(y)\geqslant K}W_1(y)dy. \tag{9.52}$$

最後的積分是在所有滿足條件 $g(y)\geqslant K$ 的部分上進行的, 但是這個最後的積分剛好就等於 $P[g(y)\geqslant K]$. 所以

$$P[g(y)\geqslant K]\leqslant\frac{\overline{g(y)}}{K}. \tag{9.53}$$

這就是所謂的契比謝夫(Чебышев)不等式. 現在取

$$g(y)=(y-\bar{y})^2.$$

按照方程(9.7),

$$\overline{g(y)}=\sigma^2=\overline{y^2}-(\bar{y})^2,$$

這裏 $\sigma^2$ 就是方差,也就是離開平均值 $\bar{y}$ 的偏差的平方的平均值. 設 $K=k^2\sigma^2$,就可以由方程(9.53)得出必耐梅-契比謝夫(Bienaymé-Чебышев)不等式:

$$P[|y-\bar{y}|\geqslant k\sigma]=P[(y-\bar{y})^2\geqslant k^2\sigma^2]\leqslant\frac{1}{k^2} \tag{9.54}$$

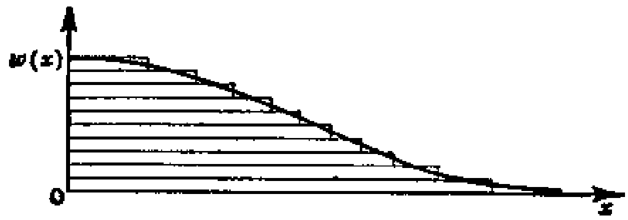


圖 9.5

對於最實際的應用來說,必耐梅-契比謝夫不等式所給的估計還是太寬鬆了,也就是說,這個不等式所給的上限常常是過高的. 如果 $W_1(y)$ 只有一個極大值, 我們就可以給出一個比較精密的估計. 這時, $W_1(y)$ 的極大值所在的點 $y_0$ 稱為衆數. 這樣的分佈函數稱為單衆數分佈函數(或單峯分佈函數). 對於單衆數分佈函數的情形,大偏差概率的估計是高斯首先作出的. 為了證明高斯的不等式,我們來考慮圖 9.5 所畫的函數 $w(x)$, $w(x)$在 $x>0$ 的區域內是單調減少的. 可以把 $w(x)$看作是許多矩形函數的和數(參看圖 9.5),這些矩形函數都是這樣的:在 $0\leqslant x\leqslant x_0$ 間隔內等於一個常數,在 $x>x_0$ 區域內等於零. 我們先來考慮矩形函數 $v(x)$:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{如果 } 0\leqslant x\leqslant x_0, & v(x)=1,\\ \text{如果 } \quad x>x_0, & v(x)=0.\end{array}\right\}$$

對於任意一個 $K>x_0$,

$$K^2\int_K^\infty v(x)dx=0.$$

但是，如果 $0<K\leqslant x_0$,

$$K^2\int_K^\infty v(x)dx=K^2(x_0-K).$$

不難證明，對於在這個範圍內的 $K$ 來說，$K^2(x_0-K)$ 的極大值是 $\frac{4}{27}x_0^3$。所以，下列關係式對於所有的 $K$ 值都是成立的：

$$K^2\int_K^\infty v(x)\,dx\leqslant\frac{4}{9}\int_0^\infty x^2v(x)dx.$$

用疊加的方法就可以得出

$$K^2\int_K^\infty w(x)dx\leqslant\frac{4}{9}\int_0^\infty x^2w(x)dx.$$

現在，來考慮一個橫坐標是 $x=y-y_0$ 的單衆數分佈函數 $W_1(x)$。這裏的 $y_0$ 是衆數。這時，

$$K^2\int_K^\infty W_1(x)dx\leqslant\frac{4}{9}\int_0^\infty x^2W_1(x)dx$$

而且

$$K^2\int_{-\infty}^{-K}W_1(x)dx\leqslant\frac{4}{9}\int_{-\infty}^{0}x^2W_1(x)dx.$$

把這兩個不等式加起來，就得

$$K^2P\,[|y-y_0|\geqslant K]\leqslant\frac{4}{9}\nu^2.$$

這裏的 $\nu$ 是離開衆數的偏差的平均值，它的定義是

$$\nu^2=\overline{(y-y_0)^2}=\int_{-\infty}^{\infty}(y-y_0)^2W_1(y)dy. \tag{9.55}$$

設 $K=k\nu$，我們就得到高斯不等式：

$$P\,[|y-y_0|\geqslant k\nu]\leqslant\frac{4}{9k^2}. \tag{9.56}$$

如果分佈函數 $W_1(y)$ 對於 $y=y_0$ 是對稱的：$W_1(y_0+x)=W_1(y_0-x)$。就有 $y_0=\bar{y}$，$\nu=\sigma$。因而，方程(9.56)就化爲

$$P[|y-\bar{y}|\geqslant k\sigma]\leqslant\frac{4}{9k^2}. \tag{9.57}$$

所以，方程(9.57)所表示的概率的估計就比方程(9.54)的估計更爲精確。

在很多情況下，我們可以認爲 $W_1(y)$ 是高斯分佈函數(至少也可以近似地這樣假設)。這時，利用誤差函數 $f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ 的漸近展開式，不難直接算出

$$P[|y-\bar{y}|\geqslant k\sigma]\approx\frac{e^{-\frac{1}{2}k^2}}{k\sqrt{2\pi}}\quad k\gg1. \tag{9.58}$$

這個概率的數值很小。例如在 $k=3$ 時，這個概率只有 0.002。可是，如果用方程(9.54)

只能知道這個概率比 0.1111 小. 即使用方程(9.57)來估計, 也只能知道這個概率小於 0.0493 而已. 這三種估計結果所以有這樣懸殊的差別,當然是因爲這些估計方法所依據的資料在確切程度上也有很大差別的緣故. 所根據的假設越一般化,所能得出的估計結果就越不精確.

### 9.7 隨機函數超過一個固定值的頻率

如果所考慮的隨機函數是結構中的應力,並且,假設需要根據應力超過某一個固定值(也就是材料的疲勞應力)的重複次數來進行設計,那末,就必須知道隨機函數在單位時間內超過固定值 $y=\xi$ 的可能次數. 這個次數顯然是隨機函數在單位時間內經過 $\xi$ 值的可能次數的一半. 用 $N_0(\xi)$ 表示上述的經過 $\xi$ 值的次數. 這個數最先是由瑞斯(S. O. Rice)計算出來的[1],下面我們也採用他的計算方法.

設 $W(y, y')dydy'$ 是在同一時刻隨機函數值 $y(t)$ 在 $y$ 和 $y+dy$ 之間而時間導數 $y'(t)$ 在 $y'$ 和 $y'+dy'$ 之間的聯合概率. 這個概率也可以解釋爲在單位時間內 $y(t)$ 和 $y'(t)$ 同時在上述的範圍內的總時間. 但是, 隨機函數經過 $dy$ 所需的時間是 $dy/|y'|$. 所以, 所需要的經過 $\xi$ 和 $y'$ 的可能次數就等於 $W(\xi, y')dy\,dy'$ 被 $dy/|y'|$ 除得的商數 $|y'|\,W(\xi, y')dy'$. 因此,對所有的 $y'$ 值積分就可以得到次數 $N_0(\xi)$,

$$N_0(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}|y'|\,W(\xi, y')dy'. \tag{9.59}$$

但是,方程(9.14)表明: 只要隨機函數 $y(t)$ 是可微的, $y(t)$ 和 $y'(t)$ 就是彼此毫無關連的. 既然如此,根據計算概率的一般原理, $W(y, y')$ 就是兩個第一概率分佈函數 $W_1(y)$ 和 $W(y')$ 的乘積. 於是,方程(9.59)就可以寫作

$$N_0(\xi)=W_1(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}|y'|\,W(y')dy'. \tag{9.60}$$

如果 $W(y')$ 是對稱的, $W(y')=W(-y')$,方程(9.60)還可以進一步簡化爲:

$$N_0(\xi)=2W_1(\xi)\int_0^{\infty}y'W(y')dy' \quad (W(y')\text{ 是對稱的}). \tag{9.61}$$

如果 $W(y')$ 是一個平均偏差是 $\sigma'$ 的高斯分佈函數,按照方程(9.9)和(9.61)就有:

$$N_0(\xi)=\frac{2W_1(\xi)}{\sigma'\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}y'e^{-y'^2/2\sigma'^2}dy'=\frac{2\sigma' W(\xi)}{\sqrt{2\pi}}. \tag{9.62}$$

利用方程(9.15)和(9.22)可以由功率譜 $\Phi(\omega)$ 算出方差 $\sigma'^2$:

$$\sigma'^2=\int_0^{\infty}\omega^2\Phi(\omega)d\omega. \tag{9.63}$$

如果 $W_1(y)$ 也是一個高斯分佈函數,假設 $y(t)$ 的平均值是 $\bar{y}$, 平均偏差是 $\sigma$. 根據方程(9.7),(9.21)和(9.62)我們就得出

$$N_0(\xi)=\frac{1}{\pi}\frac{\sigma'}{\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{(\xi-\bar{y})^2}{\sigma^2}}=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}\frac{(\xi-\bar{y})^2}{\sigma^2}}\left[\frac{\int_0^{\infty}\omega^2\Phi(\omega)d\omega}{\int_0^{\infty}\Phi(\omega)d\omega-(\bar{y})^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{9.64}$$

1) S. O. Rice, *Bell System Tech. J.*, **23**, 282 (1944); **25**, 46 (1945).

這就是瑞斯所給的公式. $N_0(\xi)/2$ 就是 $y(t)$ 超過 $\xi$ 值的頻率.

## 9.8 綫性系統對於平穩隨機輸入的反應

現在可以回答我們在這一章的引言裏所提出的那個問題了: 如果常係數綫性系統的平穩隨機輸入是給定的, 那末, 系統的輸出是怎樣的? 根據以前各節中所講的隨機函數理論的一些初步知識,很容易想到:解決這個問題的關鍵就是設法由輸入的功率譜把輸出的功率譜計算出來. 一旦知道了輸出的功率譜, 我們就可以利用方程(9.22)求出相關函數,也可以利用方程(9.21)求出平方的平均值,根據第 9.6 節和第 9.7 節的方法, 我們還可以估計出離開平均值的大偏差的概率以及超過固定值的頻率. 對於很多工程問題來說,關於輸出的特性的這些知識已經是很够用的了.

假設輸入 $x(t)$ 的功率譜是 $\Phi(\omega)$. 相關函數是 $R_i(\tau)$. 根據方程(9.21)和(9.22),我們有

$$\overline{x^2} = \int_0^\infty \Phi(\omega)d\omega = R_i(0) \tag{9.65}$$

以及

$$R_i(\tau) = \int_0^\infty \Phi(\omega)\cos\omega\tau d\tau = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \Phi(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega, \tag{9.66}$$

這裏我們用到了關係 $\Phi(\omega) = \Phi(-\omega)$,這個關係可以由方程(9.23)看出來. 同樣,我們假設輸出 $y(t)$ 的功率譜是 $g(\omega)$,相關函數是 $R_0(\tau)$. 因而有

$$\overline{y^2} = \int_0^\infty g(\omega)d\omega = R_0(0) \tag{9.67}$$

以及

$$R_0(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty g(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{9.68}$$

和以前一樣,設 $h(t)$ 是綫性系統對於 $t=0$ 時的單位冲量輸入的反應. 對於一個從 $t=-\infty$ 開始的過程來說,輸出可以寫成

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

可以這樣寫的理由是:在時刻 $\tau$ 到 $\tau + d\tau$ 之間,輸入 $x(t)$ 對於系統的作用,可以用時刻 $\tau$ 的一個大小是 $x(\tau)d\tau$ 的冲量對系統的作用來代替. 我們再把積分變數 $\tau$ 變爲 $u = t - \tau$. 就又得出

$$y(t) = \int_0^\infty x(t-u)h(u)du, \tag{9.69}$$

所以,相關函數 $R_0(\tau)$ 就是

$$R_0(\tau) = \overline{y(t)\,y(t+\tau)} = \int_0^\infty\int_0^\infty \overline{x(t-u)x(t+\tau-u')}h(u)h(u')du du'.$$

但是

$$\overline{x(t-u)x(t+\tau-u')} = \overline{x(t)(t+\tau+u-u')} = R_i(\tau+u-u'),$$

所以,根據方程(9.66)和方程(9.68),我們就得出下列關係式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \Phi(\omega)e^{i\omega(\tau+u-u')}h(u)h(u')du\,du'd\omega. \qquad (9.70)$$

如果 $F(s)$ 是綫性系統的傳遞函數，那末，$h(t)$ 的拉氏變換就是 $F(s)$. 所以[參看方程(3.50)]

$$F(i\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega u}h(u)du.$$

於是就可以把方程(9.70)改寫爲

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)F(i\omega)F(-i\omega)e^{i\omega\tau}d\omega.$$

因此，功率譜 $g(\omega)$ 和 $\Phi(\omega)$ 之間就有下列關係式：

$$g(\omega) = \Phi(\omega)F(i\omega)F(-i\omega) = |F(i\omega)|^2\Phi(\omega), \qquad (9.71)$$

在這個公式中用到了 $F(i\omega)$ 是 $F(-i\omega)$ 的複共軛數的事實.

根據方程 (9.71) 就可以由輸入的功率譜和綫性系統的頻率特性算出輸出的功率譜. 甚至於當頻率特性只是用圖綫或數字表格來表示的情形，功率譜 $g(\omega)$ 也還是不難計算出來的. 在這裏，我們又一次看到，傳遞函數與頻率特性的概念是十分有用的.

我們還注意到這樣一個有趣的事實：因爲在普通情况下，當 $\omega\to\infty$ 時，$F(i\omega)\to 0$，所以，當 $\omega\to\infty$ 時，輸出的功率譜 $g(\omega)$ 比輸入的功率譜 $\Phi(\omega)$ 更快地趨近於零. 這也就是說，輸出的高頻成分的强度比輸入的高頻成分的强度小得多. 所以綫性系統有一種使輸出比輸入更"光滑"更"規則"的作用.

## 9.9 二階系統

作爲一個簡單的例子，我們來考慮二階的綫性系統. 這時，運動方程就是

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = x(t). \qquad (9.72)$$

所以，系統的傳遞函數 $F(s)$ 是：

$$F(s) = \frac{1}{ms^2+cs+k} = \frac{1}{k}\frac{1}{(s^2/\omega_0^2)+2\zeta(s/\omega_0)+1},$$

這裏的 $\omega_0$ 是沒有阻尼時的自然頻率，$\zeta$ 是實際阻尼與臨界阻尼的比值 [參看方程(3.38)]. 所以

$$F(i\omega)F(-i\omega) = \frac{1}{k^2\{[(\omega/\omega_0)^2-1]^2+4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2\}}.$$

輸出的功率譜就是

$$g(\omega) = \frac{\Phi(\omega)}{k^2\{[(\omega/\omega_0)^2-1]^2+4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2\}}. \qquad (9.73)$$

如果我們希望知道輸出的平方的平均值，那末，方程(9.21)就給出

$$\overline{y^2} = \frac{1}{k^2}\int_{0}^{\infty}\frac{\Phi(\omega)d\omega}{[(\omega/\omega_0)^2-1]^2+4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}. \qquad (9.74)$$

如果 $\zeta$ 很小，方程(9.74)的被積函數的分母在 $\omega=\omega_0$ 處幾乎等於零. 因此，如果 $\Phi(\omega)$ 是一個變化緩慢的函數，就有

$$\overline{y^2} \approx \frac{\omega_0 \Phi(\omega_0)}{k^2} \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^2 + 4\zeta^2 x^2} = \frac{1}{k^2} \omega_0 \Phi(\omega_0) \frac{\pi}{4\zeta} = \frac{\pi}{2mc} \frac{\Phi(\omega_0)}{\omega_0^2}. \tag{9.75}$$

這個方程表明：如果阻尼系數 $c$ 趨近於零，輸出的平方的平均值就變爲無限大．當 $c$ 等於零時，傳遞函數有一個純虛數極點 $i\omega_0$．一般說來，只要綫性系統的傳遞函數有一個純虛數極點，就會發生輸出是無限大的現象．因此，如果要求綫性系統在隨機輸入下具有符合需要的運轉狀態，傳遞函數 $F(s)$ 必須滿足的條件就是：$F(s)$ 的**所有極點的實數部分都應該是負數**．對系統性質所提出的這一個基本要求與普通的輸入函數的穩定性條件是完全相同的．

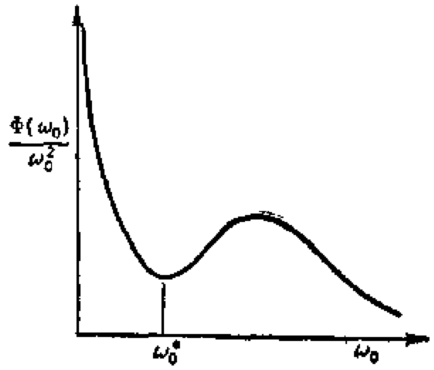


圖 9.6

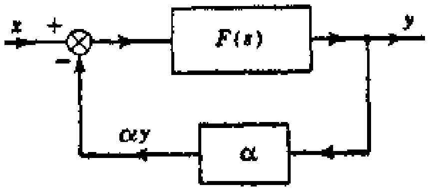


圖 9.7

一般說來，可以用進一步改變系統的傳遞函數的方法來改善輸出的其他性能．例如，我們完全可以設想，在某一個合用的頻率 $\omega_0^*$ 處，函數 $\Phi(\omega_0)/\omega_0^2$ 取極小值，就像圖 9.6 所畫的那樣．這時，如果我們能使系統的自然頻率就是 $\omega_0^*$．那末，輸出的隨機振幅的大小就可以減小到幾乎是最低的限度．其實，這是很容易作到的，只要在系統上加一個傳遞函數是常數 $\alpha$ 的反饋綫路就可以了(參看圖 9.7)．這樣一來，系統的運動方程就變成

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = x - \alpha y$$

或者

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + (k+\alpha)y = x. \tag{9.76}$$

系統的自然頻率就變爲 $\sqrt{(k+\alpha)/m}$，所以，只要適當地選擇 $\alpha$ 的值，就可以使系統的自然頻率等於 $\omega_0^*$：

$$\omega_0^{*2} = \frac{k+\alpha}{m}. \tag{9.77}$$

這樣作的結果就使得輸出的大小減小了．

## 9.10 不可壓縮的湍流中作用在一個二維機翼上的舉力

作爲第二個例子，我們考慮一個弦長是 $c$ 的薄平板狀的機翼，這個機翼以一個常速度 $U$ 在空氣的湍流中運動．設 $x$ 軸在弦的方向上，$z$ 軸在機翼的跨度方向上，$y$ 軸與跨度方向和弦都垂直．假設湍流的擾動速度分量 $u, v, w$ 與 $U$ 相比較都是很小的．由於這些湍流擾動速度的存在，機翼就有一個隨時間變化的明顯的冲角 $\alpha$，因而也就在機翼上產生了隨時間變化的升力．只要擾動速度相當小，變化着的冲角 $\alpha$ 就由下列公式給出：

$$\alpha = \frac{v}{U},$$

這時，可以把冲角 $\alpha=\alpha(t)$ 看作是系統驅動函數．系統的"反應"（輸出）就是機翼上變化着的舉力，或者，更好一些，把舉力系數 $C_l$ 看作是系統的反應．這是李普曼（H. W. Liepmann）研究過的一個問題[1]．

爲了求出舉力系數的平均平方値 $\overline{C_l^2(t)}$，首先必須確定機翼的一個傳遞函數． 這個工作已經在第 3.7 節裏作過了． 其實，如果 $v$ 是輸入，舉力系數 $C_l$ 是輸出，那末，頻率特性 $F(i\omega)$ 就是由方程(3.67)到(3.71)的各個方程所表示的．

雖然，實質上湍流擾動是三維的，也就是說，$u, v, w$ 都是 $x, y, z, t$ 的函數．可是，對於第一次近似的分析來說，只考慮 $v$ 以及 $v$ 與 $x, t$ 的關係似乎就很够了． 所以，在湍流中我們只來考慮下列形狀的擾動速度或冲角：

$$\alpha(x, t)=\frac{v(x, t)}{U}.$$

假定，在數量級是 $c/U$ 的時間裏，湍流的特性沒有顯著的變化，冲角就只與 $t-(x/U)$ 有關，第 3.7 節所給的西爾思的結果也就可以應用． 在分析湍流的時候，常常採用這一個假設．這個假設實質上也就是要求下面的條件成立：一個流體質點的流速的時間變化率小於一個固定的空間點處的流速的時間變化率．根據這個假設，就有

$$\overline{C_l^2}=4\pi^2\int_0^\infty \Phi(\omega)\,|\varphi(k)|^2\,d\omega, \tag{9.78}$$

其中的 $\Phi(\omega)$ 是 $v/U$ 的功率譜．

按照方程(9.31)和(9.32)，

$$\Phi(\omega)=\frac{\overline{v^2}}{U^2}\frac{L}{\pi U}\frac{1+3(L^2\omega^2/U^2)}{[1+(L^2\omega^2/U^2)]^2}. \tag{9.79}$$

此外，李普曼還發現 $|\varphi(k)|^2$ 可以近似地表示爲

$$|\varphi(k)|^2\approx\frac{1}{1+2\pi k}. \tag{9.80}$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{C_l^2}&=4\pi^2\frac{\overline{v^2}}{U^2}\int_0^\infty\frac{1+3u^2}{(1+u^2)^2}\frac{1}{1+\eta u}\,du\\&=4\pi^2\frac{\overline{v^2}}{U^2}\left[\frac{4\eta-\pi}{2\pi(\eta^2+1)}+\frac{\eta^2+3}{2\pi(\eta^2+1)^2}(\eta\log\eta^2+\pi)\right],\end{aligned} \tag{9.81}$$

其中

$$\eta=\frac{\pi c}{L}. \tag{9.82}$$

舉力系數的平均平方値與參數 $\eta$ 之間的關係如圖 9.8 所示．

很顯然，如果 $c/L\to 0$，這就是弦長比湍流的尺度小得很多的情形． 這時

$$\overline{C_l^2}\to 4\pi^2\frac{\overline{v^2}}{U^2}=4\pi^2\overline{\alpha^2}.$$

在似穩狀態中，機翼的舉力系數與冲角的關係曲綫的斜率就是 $2\pi$． 相反地，如果 $c/L$ 非

1) H. W. Liepmann, *J. Aeronaut. Sci.* **19**, 793—801 (1952).

常大，這就是機翼的弦長比湍流的尺度大得很多的情形，根據方程(9.80)，這時 $\overline{C_l^2}$ 幾乎等於零．這也就是說：各個局部的擾動總起來說都互相抵消掉了，所以，總的舉力是零．其實這個結果是可以想像到的．

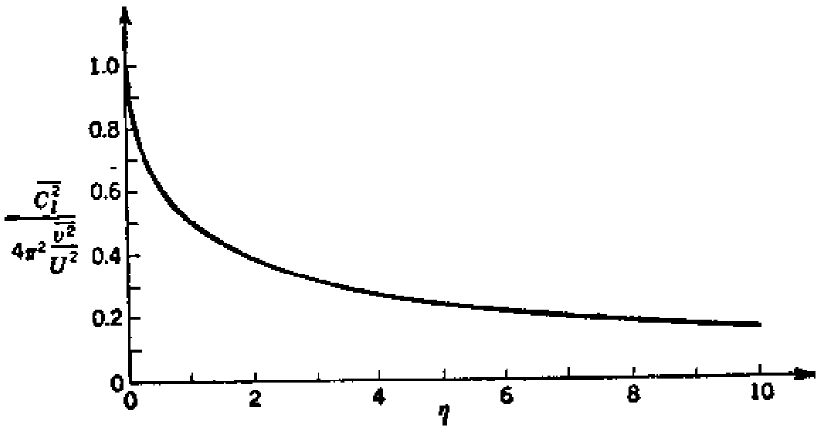



圖 9.8

## 9.11 間歇的輸入

關於空氣動力學的擾流抖振問題有一個極爲重要的現象，這就是尾流中的間歇現象．所謂間歇現象是這樣的：一個尾流的邊緣的運動尺度很大，以至於邊緣附近的一個點有時候處於尾流的內部，有時候又在尾流的外面．如果一個尾翼與一個失速或者部分失速的機翼的尾流的邊緣很接近，這種間歇現象對於尾翼上的升力就會發生很重要的影響．對於這種作用可以作這樣一個粗略的理解：可以把尾部的流動看作是一個均勻洗流的區域，這個洗流是有時存在有時消失的，洗流作用的時間是一系列不規則的時間間隔[19,43]．這樣一個流動對於間歇地失速的機翼的尾流中的情況來說，或許就是一個好的模型．在這種情況下，尾翼上的流動狀態就是時而這樣時而那樣的，從一種狀態變到另一種狀態(從有洗流的狀態變到沒有洗流的狀態，或者反過來)的時間間隔的長度 $T$ 就是一個隨機函數，假定 $T$ 的概率分佈函數是泊松分佈函數，那末，只要把方程(9.50)稍微修改一下就可以得出 $T$ 的功率譜．這裏的平均偏差不是 1 而是角度平均值 $\sqrt{\overline{v^2}}/U$；驅動函數(洗流)起作用的時間間隔的平均值也就是 $T$ 的平均值 $\overline{T}$．所以，功率譜就是

$$\Phi(\omega)=\frac{\overline{v^2}}{U^2}\frac{\overline{T}}{\pi}\frac{1}{1+(\omega\overline{T}/2)^2}. \tag{9.83}$$

於是舉力系數的平均平方值的近似值就是：

$$\begin{aligned}\overline{C_l^2}&=\frac{\overline{v^2}}{U^2}\frac{\overline{T}}{\pi}4\pi^2\int_0^\infty\frac{d\omega}{[1+(\omega\overline{T}/2)^2][1+\pi(\omega c/U)]}\\&=4\pi^2\frac{\overline{v^2}}{U^2}\frac{2}{\pi}\frac{\eta\log\eta+\dfrac{\pi}{2}}{1+\eta^2}\qquad\left(\eta=\frac{2\pi c}{U\overline{T}}\right).\end{aligned} \tag{9.84}$$

$\overline{C_l^2}$ 與 $\eta$ 的這個關係畫在圖 9.9 上．$\eta\to 0$ 和 $\eta\to\infty$ 時的極限値當然是與上一節研究過的那種情形相等的．

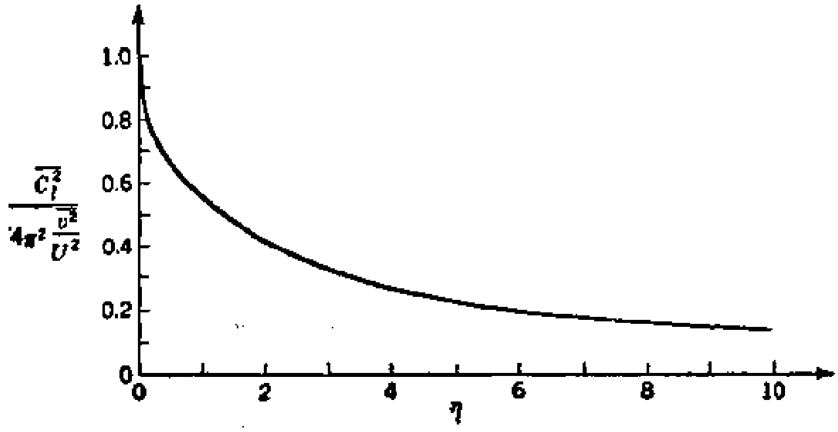



圖　9.9

## 9.12　爲隨機輸入而作的伺服控制設計

在第 9.9 節裏，我們曾經討論了二階系統對於隨機輸入的反應，那個討論也已經說明了用伺服控制改進系統的性能的可能性．但是，在那個例子裏反饋機構還是相當原始的，因爲進行反饋控制作用所需要的力的數量級與輸入驅動函數的數量級相同．在一個更實際的設計中，我們可以把反饋機構設計得更巧妙一些，使得反饋作用所需要的力減少很多．例如，可以用反饋伺服機構帶動可以轉動的附加翼片，從而控制湍流中的機翼的運動．轉動翼片所需要的力與機翼運動所引起的空氣動力效應(舉力，阻力，轉矩等)相比較，可以是小得很多的．我們可以把這個伺服控制系統的方塊圖想像爲圖 9.10 的情形．

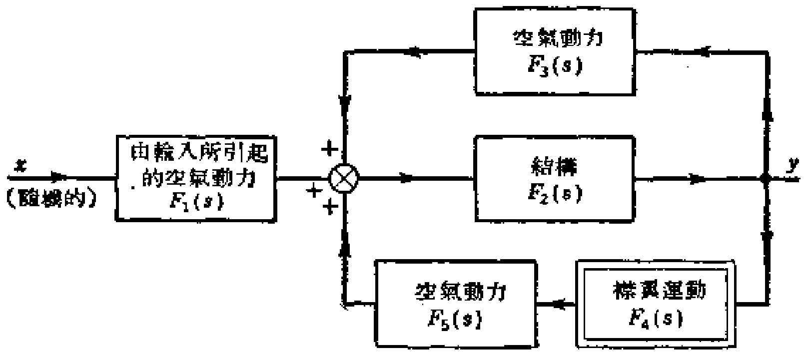



圖　9.10

輸入的隨機函數是擾動氣流．輸出就是機翼的位移．第一個傳遞函數 $F_1(s)$ 表示擾動氣流和這個氣流所引起的舉力之間的關係，這個函數可以近似地用方程(3.69)來表示．舉力與轉矩變化的結果，就使得機翼產生鉛直方向的運動和旋轉運動．這些由於空氣動力的原因所產生的外力與機翼的運動之間的關係是由結構的傳遞函數 $F_2(s)$ 所描述的．機翼的運動又要產生兩種作用．機翼的運動通過第二個空氣動力學的傳遞函數 $F_3(s)$ 又產生空氣動力．這是第一個反饋綫路，然而，這個反饋綫路不是設計者所能任意改動的．設計者能够處理的是第二個反饋綫路．機翼的運動可以用來控制襟翼的運動，假設這一部分的傳遞函數是 $F_4(s)$．襟翼的運動通過傳遞函數 $F_5(s)$ 又產生空氣動力．所以輸入 $X$ 與輸出 $Y$ 之間的關係就是

$$Y = F_2(s)[F_1(s)X + F_3(s)Y + F_5(s)F_4(s)Y]$$

或者

$$\frac{Y}{X} = F_s(s) = \frac{F_1(s)F_2(s)}{1 - F_2(s)[F_3(s) + F_5(s)F_4(s)]}. \tag{9.85}$$

所以,改動伺服機構的傳遞函數 $F_4(s)$ 就可以使系統的總傳遞函數得到改善.

如果 $\Phi(\omega)$ 是輸入 $x$ 的功率譜, $g(\omega)$ 是輸出的功率譜,那末,按照方程(9.71),

$$g(\omega) = \Phi(\omega)F_s(i\omega)F_s(-i\omega), \tag{9.86}$$

這裏的 $F_s(s)$ 就是由方程(9.85)給定的. 完全可以想到,如果希望飛機裏的乘客得到最大的安適,我們就必須使加速度 $y''(t)$ 儘可能地小,這也就意味着要求 $\overline{y''^2(t)}$ 取極小值. 方程(9.16)表明 $y''(t)$ 的平均平方值可以由相關函數計算出來. 可是,相關函數又可以用方程(9.22)由功率計算出來. 把這兩個一般的公式用到方程(9.85)和(9.86)的特殊情形上來,就得出

$$\overline{y''^2(t)} = \int_0^\infty \omega^4\Phi(\omega)\left|\frac{F_1(i\omega)F_2(i\omega)}{1 - F_2(i\omega)[F_3(i\omega) + F_5(i\omega)F_4(i\omega)]}\right|^2 d\omega. \tag{9.87}$$

因爲 $F_1(s)$, $F_2(s)$, $F_3(s)$ 和 $F_5(s)$ 都已經固定下來,不能再加以改變. 所以我們只能用改動伺服機構傳遞函數 $F_4(s)$ 的方法使 $\overline{y''^2(t)}$ 達到極小值. 我們可以採用下列作法:先作出一個伺服機構傳遞函數 $F_4(s)$,但是暫時先不確定其中的參數的數值. 既然,其餘的傳遞函數都已經確定,如果又知道輸入的功率譜[例如,像方程(9.79)那樣],那末,根據方程(9.87)就可以把 $\overline{y''^2(t)}$ 計算出來,計算結果中當然也包含 $F_4(s)$ 的未定參數. 對於這些未定參數,我們就可以用普通的求極小值的方法加以計算,這樣確定出來的參數的値就可能使 $\overline{y''^2(t)}$ 取極小值. 這樣確定的 $F_4(s)$ 就是使乘客最舒適的伺服機構傳遞函數. 必須指出:在這個方法中, $F_4(s)$ 的基本形式(基本構造)還是由設計者根據某些實際情況和經驗相當隨意地選定的,只是某些參數尙未確定而已. 所以,上面得到的極小值並不一定是眞正能够達到的極小值. 因爲,如果把 $F_4(s)$ 的基本形式加以改變,還是用同樣的計算方法就可能得出一個更好的結果. 所以,如果希望得到更好的結果,我們還必須研究 $F_4(s)$ 應該是哪一種形式的函數的問題,要解決這種問題就要用一種比較複雜的數學方法——變分法. 關於變分法的基本作法,我們將要在第十四章中加以介紹,這裏就不再討論.

以上的討論只是在特定的輸入條件下,爲了特定的目的所作的最優伺服控制設計的一個例子. 如果目的不同,設計條件也可以是這樣的:要求擾動氣流在機翼結構中引起的應力的平均平方値取極小値. 這時的系統傳遞函數 $F_s(s)$ 當然與以前的例子不同了,但是,問題的數學形式和處理方法還是相同的. 以前各章中討論了很多對於伺服系統的穩定性和其他的定性的性質的要求,現在的這種關於定量的最優設計可以看作是更進一步的要求. 這樣一個比較一般的概念大約是勃克森包姆(A. S. Boksenbom)和諾威克(D. Novik)首先提出來的[1],在第十六章裏,我們還要談到這個問題.

1) A. S. Boksenbom, D. Novik *NACA TN* 2939 (1953)

# 第 十 章

# 繼電器伺服系統[1]

如果在伺服系統中有一個繼電器(跳動開關)，那末，這樣一個伺服系統就稱爲繼電器伺服系統． 正如第 6.3 節所指出的，繼電器伺服系統的一個重要優點就是價錢比較便宜．但是，由於繼電器的輸出和輸入不是成比例的，也就是說，輸入與輸出之間的關係不是綫性的，所以，不能用綫性理論來分析一個繼電器伺服系統的運動狀態． 在這一章裏，我們首先提出一個用來研究繼電器伺服系統以及其他類似的系統的穩定性的近似理論，這個理論也是以乃氏判斷準則的一種變形爲基礎的． 在這一章的後一部分中，我們還要討論一個更新穎同時也更困難的問題，這個問題就是：怎樣利用繼電器所固有的非綫性的特性使伺服系統得到更好的運轉性能． 遺憾得很，這樣一個有意義的問題一直還沒有被完整地研究過；這個問題的徹底解決還有待於未來．

## 10.1 一個繼電器的近似的頻率特性

我們來考慮一個頻率是 $\omega$ 而振幅是 $a$ 的正弦式的輸入 $x(t)$，

$$x(t) = a\sin\omega t. \tag{10.1}$$

爲了討論的方便，我們把繼電器的性能加以理想化：假設繼電器沒有時間延遲的現象，而且它的開關動作都可以在一瞬間完成，而不需要花費時間，總之，沒有時滯現象．但是，繼電器特性本身的滯後現象還是被考慮的：在輸入是正數而且逐漸增大的過程中，如果輸入在 0 與 $b$（$b$ 是一個比較小的正常數）之間，繼電器的輸出是零．當輸入增加到 $b$ 的時候，輸出就立刻從零變到滿值 $A$（$A$ 是一個正常數）．在輸入是正數可是逐漸減小的過程中，只要輸入大於 $c$（$c$ 也是一個正常數）輸出就總是 $A$，一旦輸入減小到 $c$ 的時候． 輸出就由滿值 $A$ 立刻變爲零．一般來說，$b$ 總是比 $c$ 大． 如果把電流看作是繼電器的輸入，那末，$b$ 就稱爲接通電流，$c$ 就稱爲開斷電流． 當輸入是負數的時候，$-b$ 和 $-c$ 分別是接通電流和開斷電流，輸出的滿值是 $-A$． 圖 10.1 所畫的就是上述的輸入-輸出關係． 由

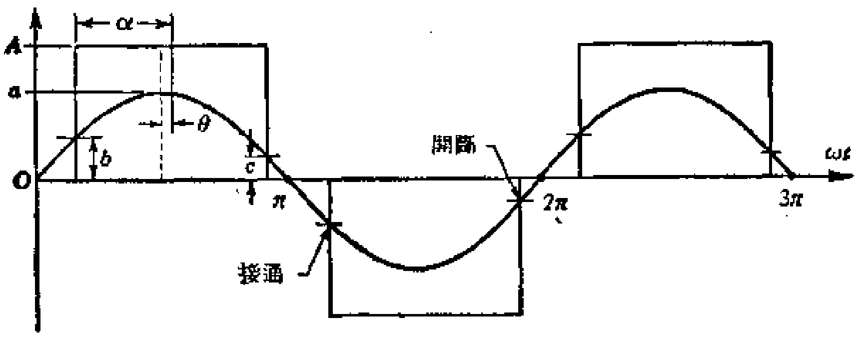



圖 10.1

1) 參閱[5, 6, 7, 9, 13, 17, 27, 38, 44]．

於 $b \neq c$, 所以輸入與輸出之間就有一個相角差. 輸入的相角落後的值 $\theta$

$$\theta = \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{b}{a} - \sin^{-1}\frac{c}{a}\right]. \tag{10.2}$$

輸出的每一個矩形波的長度都是 $2\alpha/\omega$, 這裏的 $\alpha$ 是由下列公式給定的,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta - \sin^{-1}\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\left[\pi - \sin^{-1}\frac{b}{a} - \sin^{-1}\frac{c}{a}\right]. \tag{10.3}$$

輸出的周期與輸入的周期是相等的,它們都是 $2\pi/\omega$.

現在,輸出就可以展成一個富利埃級數,

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left[n(\omega t - \theta)\right]. \tag{10.4}$$

基本諧波(第一次諧波)的系數 $a_1$ 就是

$$a_1 = \frac{4A}{\pi}\sin\alpha,$$

這裏的 $\alpha$ 是由方程(10.3)所給出的. 在圖 10.2 所畫的繼電器伺服系統中,繼電器的輸出就是控制伺服機構的改正信號. 伺服機構通常都具有濾波器的性質,它能够使高次諧波

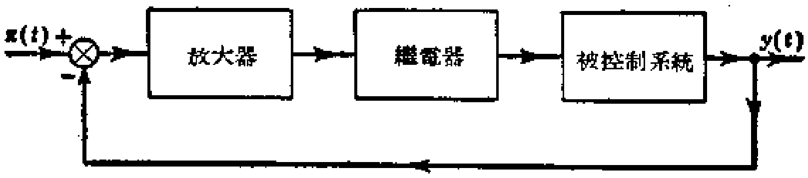



圖 10.2

的影響大大地減小. 因此,作為一個近似的考慮,我們把所有高次諧波都忽略掉,把輸出就看作是 $a_1 \sin(\omega t - \theta)$. 如果 $\omega \geqslant 0$,採用複數形式,輸出與輸入的比值就是:

$$F_r(i\omega) = \frac{4A\sin\alpha}{\pi a} e^{-i\theta} \quad (\omega \geqslant 0),$$

如果 $\omega < 0$,輸入 $a \sin \omega t = -a \sin|\omega| t$, 這時輸出的基本諧波就是

$$-\frac{4A}{\pi}\sin\alpha\sin\left[|\omega| t - \theta\right] = \frac{4A}{\pi}\sin\alpha\sin(\omega t + \theta).$$

所以,用複數形式表示,輸出與輸入的比值就是

$$F_r(i\omega) = \frac{4A\sin\alpha}{\pi a} e^{+i\theta}.$$

總結起來,輸出與輸入的比值就是

$$F_r(i\omega) = \begin{cases} \dfrac{4A\sin\alpha}{\pi a} e^{-i\theta} & \omega \geqslant 0, \\[2ex] \dfrac{4A\sin\alpha}{\pi a} e^{+i\theta} & \omega \leqslant 0. \end{cases} \tag{10.5}$$

我們把 $F_r(i\omega)$ 看作是繼電器的"頻率特性",但是,這只是一種說法而已,$F_r(i\omega)$ 並不是眞正的頻率特性. 正像以前各章所定義的那樣,眞正的頻率特性只是頻率 $\omega$ 的函數,與輸入的振幅是沒有關係的. 可是,恰好相反,這裏的 $F_r(i\omega)$ 是振幅 $a$ 的函數,除了與 $\omega$ 的符號有關係之外, $F_r(i\omega)$ 與 $\omega$ 的大小並沒有關係. 由此可見,我們所用的函數符號 $F_r(i\omega)$ 以

及"頻率特性"的名稱並不合理,但是,爲了與普通的符號和名稱容易統一起見,我們還是採用了這種符號和名稱. 應該注意到,和普通的情形一樣,$F_r(i\omega)$ 也有下列的重要性質:

$$\overline{F_r(i\omega)} = F_r(-i\omega).$$

如果輸入的振幅 $a$ 非常大,根據方程(10.2),(10.3)和(10.5)就有

$$F_r(i\omega) \approx \frac{4A}{\pi}\frac{1}{a} \qquad a \gg 1. \tag{10.6}$$

如果振幅 $a$ 相當小,$a < b$,繼電器根本就沒有反應.

如果振幅 $a$ 剛好等於接通電流 $b$, $a = b$. 那末

$$\theta = \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{c}{b}\right) \qquad a = b. \tag{10.7}$$

這個臨界情形稱爲繼電器的開斷點.

可見,這些極端情況下的 $F_r(i\omega)$ 的值是由繼電器的特性所確定的.

## 10.2 柯氏(Kochenburger)方法

我們暫且假定輸入的各個調和分量(也就是各次諧波)的振幅都是 $a$. 這時,繼電器的頻率特性就是一個由方程(10.5)所給定的複常數. 圖 10.2 的控制綫路中除了繼電器之外,還有其他的部件,假設這些部分的頻率特性是 $F_1(i\omega)$. 那末,前向控制綫路的總的頻率特性就是 $F_r(i\omega)F_1(i\omega)$. 我們讓 $\omega$ 從 0 變到 $\infty$,把相當的乃氏圖綫 $1/[F_r(i\omega)F_1(i\omega)]$ 畫在複平面上,根據乃氏準則,如果系統是穩定的,乃氏圖綫必定要"包圍" $-1$ 點,換句話說,乃氏圖綫一定要在 $-1$ 點的左方穿過實軸. 但是,在振幅都是常數 $a$ 的情況中,$F_r(i\omega)$ 是一個常數,所以上述的穩定性條件也就相當於要求頻率特性曲綫 $1/F_1(i\omega)$ ($\omega$ 從 0 變到 $\infty$)包圍 $-F_r(i\omega)$ 點. 以上的討論結果就是確定繼電器伺服系統的柯氏方法的基礎[1]. 果德發爾布[39](Л. С. Гольдфарб)在比較早的時候已經採用過這種方法,都梯爾(J. R. Dutilh)也獨立地發明了一個類似的方法[2].

柯氏(柯痕布爾格爾)指出: 當輸入的各個調和分量的振幅不都相等的時候,只要把上一段中所講的穩定條件應用到相當於 $a$ 從 0 變到 $\infty$ 的所有的 $F_r(i\omega)$ 值上去就可以了. 當 $a$ 從 0 變到 $\infty$ 的時候,$-F_r(i\omega)$ 的軌跡也是一條曲綫,這條曲綫的起點就是方程(10.7)所表示的開斷點,終點就是複平面的原點. 圖 10.3 所畫的就是這種情形. 這種圖綫就稱爲柯氏圖. 因此,柯氏方法中的穩定的充分條件就是: $1/F_1(i\omega)$ 圖綫必須像圖 10.3 那樣把整個 $-F_r(i\omega)$ 圖綫包圍起來. 圖 10.4 所畫的是絕對不穩定的情形. $-F_r(i\omega)$ 圖綫上的箭頭所表示的是繼電器的輸入振幅 $a$ 增大的方向. $F_1(i\omega)$ 圖綫上的箭頭所表示的是頻率 $\omega$ 增大的方向,而且這條圖綫當 $\omega = 0$ 時從原點出發.

除了這兩種絕對穩定與絕對不穩定的情形外,也還有部分穩定(或部分不穩定)的情形,在這種部分穩定的情形中可能在一個固定的頻率上發生一個振幅也是常數的自激振盪. 例如,圖 10.5 表示一種有收斂點的情形. 如果振幅 $a$ 足够小,$-F_r(i\omega)$ 點就在圖綫 $1/F_1(i\omega)$ 的"外面",因而系統是不穩定的,於是振盪的振幅就逐漸增大,當振幅增大的時

1) R. J. Kochenburger, *Trans. AIEE*, **69**, 270—284 (1950).

2) J. R. Dutilh, *L'Onde électrique*, **30**, 438—445 (1950).

候，$-F_r(i\omega)$ 點就朝向 $1/F_1(i\omega)$ 圖綫移動．最後就到達 $P_1$ 點．這時候，系統就以相當於 $P_1$ 點的頻率和振幅進行穩定的自激振盪．可見，只要有一個振幅不太大的初始擾動，(這個擾動並不須要持續地作用)系統最後就會自動地達到這個自激振盪．這種運動狀態

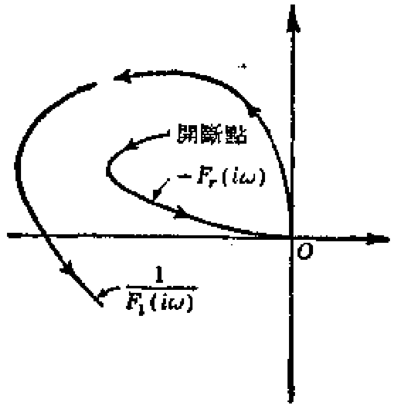



圖 10.3

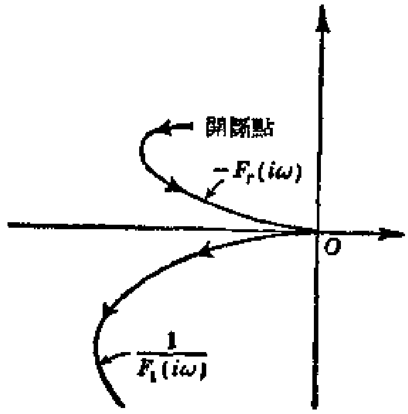



圖 10.4

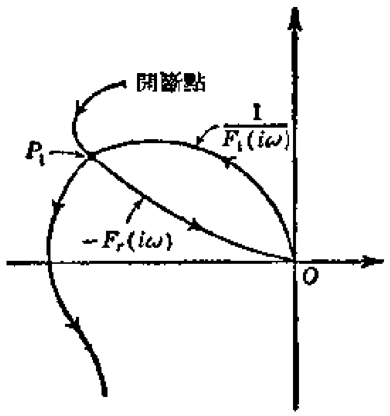



圖 10.5

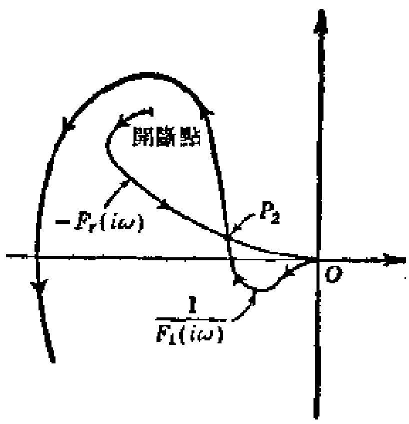



圖 10.6

稱爲**軟性的自激發**．不難看出，系統不可能有離開自持振盪點 $P_1$ 的傾向，原因是這樣的：只要振幅有一些增大，$-F_r(i\omega)$ 點就進入圖形上的穩定區域，因而也就受到阻尼的作用迫使振幅減小而使系統回到 $P_1$ 點的自激振盪狀態．所以，$P_1$ 點才稱爲“收斂點”，而系統也就會持續地振盪．圖 10.6 表示的是另外一種情形．$-F_r(i\omega)$ 圖綫與 $1/F_1(i\omega)$ 圖綫的交點 $P_2$ 是一個**發散點**．和以上的討論相類似，我們可以看出：系統在 $P_2$ 點也可能發生自激振盪，不過這個振盪是不穩定的，系統的運動狀態有離開 $P_2$ 點的傾向，只要有一點擾動，系統就會離開 $P_2$ 點的振盪狀態．但是，如果系統最初是靜止的，而且所受到的擾動不太大．$-F_r(i\omega)$ 點就不會跑出穩定區域，因而系統的靜止狀態就是穩定的．

圖 10.7 和圖 10.8 所表示的是更複雜一些的情形，在這兩種情形中，既有收斂點 $P_1$ 也有發散點 $P_2$．對於圖 10.7 的系統來說，初始擾動的振幅必須充分大(具體地說，要大於 $P_2$ 點所相當的振幅)才能使系統發生自激振盪，所以這種運動狀態稱爲**硬性的自激發**．圖 10.8 所表示的系統，總是可以由不大的初始擾動引起穩定的自持振盪的．但是，如果

初始擾動的振幅太大(具體地說,大於與 $P_2$ 點相當的振幅),系統就不再能發生自激振盪,這時系統的振幅將要無限地增大。

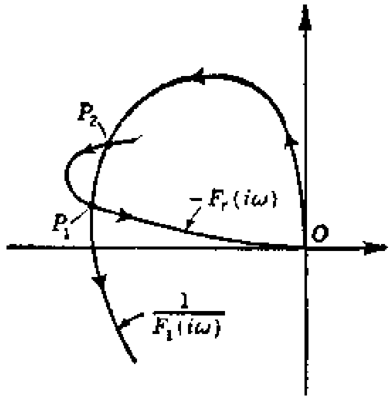



圖 10.7

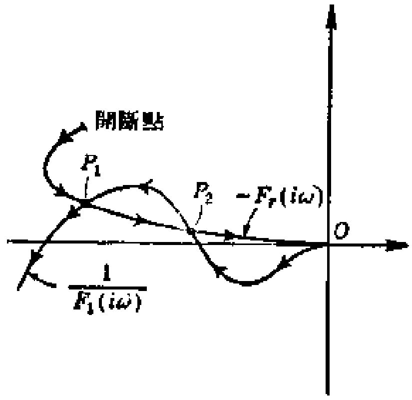



圖 10.8

從圖 10.5 到圖 10.8 所表示的各種情形,可以明顯地看到系統的運動狀態與擾動振幅之間有着密切的關係. 並且也看到發生頻率與振幅都是固定常數的自激振盪的可能性. 所有這些性質都是非綫性系統的特性,也是以前各章討論過的綫性系統所沒有的. 其實,只要根據第 1.3 節的介紹性的討論,我們就可以猜想到非綫性系統可能有這樣一些"不尋常"的性質.

## 10.3 其它的頻率遲鈍非綫性機構

對於繼電器伺服系統的穩定性問題來說,柯氏方法是一個很有效的解決方法. 這個方法對於相當複雜的系統都能够應用,而且,只要用實驗方法測出關於頻率特性的數據就可以用這個方法,並不需要求出頻率特性的解析表示式. 在絕大多數的實際情形中,繼電器後面所連接的伺服機構都有相當的濾波作用,所以,在以前的討論中把輸出中的高次諧波忽略掉的作法也是很合理的. 用以上的理論分析所得的結果與實驗結果是十分符合的. 因此,如果穩定性是唯一的設計準則,那末,柯氏方法就解決了繼電器伺服系統的全部問題.

其實,柯氏方法不僅能應用到繼電器伺服系統上,而且對於許多其他的非綫性機構來說,用柯氏方法也能得到同樣好的效果. 這個分析方法的重要關鍵就是:繼電器的運動特性與頻率無關,只與振幅有關. 然而,綫性系統的運動特性却是只與頻率有關而與振幅無關的. 實際上,有很多非綫性機構與繼電器有相同的特性. 譬如說,一個有間隙的傳動齒輪組就是一種這樣的機構. 從以下的討論就可以看出這件事實: 設 $\theta_1$ 是發動機的主動軸的轉角,這個軸與齒輪組的第一個齒輪的連接是剛固的; $\theta_2$ 是剛固地連接在齒輪組的最後一個齒輪上的從動軸的轉角. $\theta_1$ 與 $\theta_2$ 之間的關係可以用圖 10.9 來表示,其中的 $2\delta$ 是齒輪組的總間隙. 如果齒輪組的輸入 $\theta_1$ 是一個正弦式的振動,那末,輸出 $\theta_2$ 就是一種"被壓扁"的正

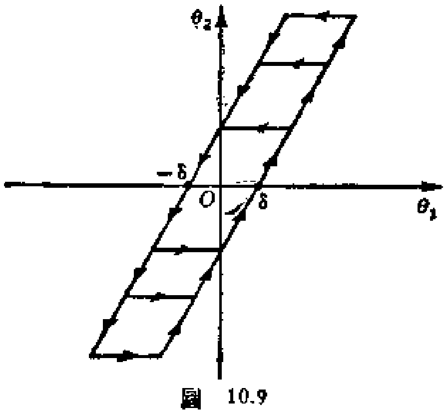



圖 10.9

弦波，而且有一個相角落後(圖 10.10)．不難看出：既然 $\theta_1$ 與 $\theta_2$ 之間的關係不明顯地與時間有關，所以，$\theta_1$ 的頻率的改變也不會使 $\theta_2$ 的波形受到影響．因此，齒輪組的反應只隨振幅改變，而與頻率無關，所以和繼電器一樣，齒輪組也是一個頻率遲鈍的機構．

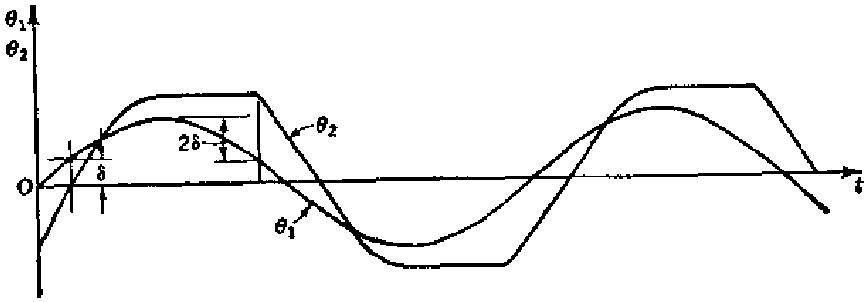



圖　10.10

如果我們用頻率特性 $F_g(i\omega)$ 表示輸出 $\theta_2$ 的基本諧波與輸入 $\theta_1$ 的基本諧波的振幅比值與相角落後．那末，$F_g(i\omega)$ 只是 $\theta_1$ 的振幅 $a$ 的函數，而不是頻率 $\omega$ 的函數．利用頻率特性 $F_g(i\omega)$，我們就可以研究包含這種有間隙的齒輪組的伺服系統，其作法與上一節中用頻率特性 $F_r(i\omega)$ 研究繼電器伺服系統的辦法完全相同．

## 10.4 繼電器伺服系統的最優運轉狀態

我們都知道，按照柯氏方法，為了使系統穩定，柯氏圖中的 $1/F_1(i\omega)$ 圖綫必須繞過整個的繼電器頻率特性曲綫 $-F_r(i\omega)$．不是像普通的伺服系統那樣只要繞過 $-1$ 點就够了．所以，對於系統中其餘的綫性部分來說，這是一個更苛刻的要求．同時這也就是為什麼繼電器伺服系統的運轉狀態往往不如普通的伺服系統好的道理．然而，這並不真正是繼電器伺服系統的缺點．事實上，如果我們不只限於要求系統穩定，我們可以把繼電器看作是一個開關機構，這個機構能發出正常數的改正信號和負常數的改正信號，也可以不產生改正信號．這時，我們就可以提出這樣一個問題：我們應該怎樣根據輸出的情形來開閉系統中的繼電器，才能使整個系統得到最優的運轉狀態？譬如說，對系統的運轉狀態，我們有這樣一個要求：在受到擾動之後，能够儘可能最快地恢復原來的正常狀態．以這樣一個要求來說，它不只是要求保證能够回到原來的正常狀態(穩定性)而且還要求恢復得最快．解決這樣一個最優運轉狀態的問題的辦法就是要設法確定一個輸出的開關函數，只要繼電器按照這個函數動作就使得系統具有最優的運轉狀態．這樣一個開關函數就是實際設計一個伺服系統的基礎．毫無疑問，根據這個更一般的觀點設計出來的繼電器伺服系統一定具有比普通的伺服系統更好的性能．因為這種作法已經最充分地利用了繼電器的非綫性的特性．

## 10.5 相平面

如果 $y$ 是輸出，$x$ 是輸入，那末一個一般的(綫性的或者非綫性的)二階系統的微分方程可以寫成

$$f(y, \dot{y}, \ddot{y}; t) = x(t), \tag{10.8}$$

這裏的圓點表示對時間的微分．我們可以把方程(10.8)改寫為一個方程組：

$$f\left(y, \dot{y}, \frac{d\dot{y}}{dt}; t\right) = x(t), \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}. \tag{10.9}$$

如果我們把 $y$ 與 $\dot{y}$ 看作是因變數，那末，方程組(10.9)就是未知函數 $y$ 與 $\dot{y}$ 的兩個一階聯立微分方程。如果像常常遇到的情形一樣，系統是自持的，也就是說，不但方程(10.8)中的函數 $f$ 與時間 $t$ 無關，而且也沒有輸入，$x=0$，那末，就可以把 $d\dot{y}/dt$ 從方程組(10.9)的第一個方程中解出來，而把 $d\dot{y}/dt$ 表示爲 $y$ 與 $\dot{y}$ 的函數，所以，系統的方程組又可以寫成

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = \dot{y}k(y, \dot{y}), \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}. \tag{10.10}$$

這個方程組不明顯地包含 $t$ (除了運算符號 $d/dt$ 之外)。把方程組(10.10)的第一個方程用第二個方程除一下，我們就得出

$$\frac{d\dot{y}}{dy} = k(y, \dot{y}). \tag{10.11}$$

這是一個以 $y$ 爲自變數而以 $\dot{y}$ 爲因變數的一階微分方程。把這個方程解出來以後，就可以利用方程組(10.10)把 $y$ 和 $t$ 的關係計算出來。

從物理的觀點來看，上一段所提到的作法是以下列的概念爲依據的：只用 $y$ 和 $\dot{y}$ 就可以描述系統的狀態，而不像比較普通的方法那樣，用 $y$ 和 $t$ 來描述。如果說 $y$ 是描寫一個質點的位置的變數，那麼 $\dot{y}$ 就是速度。因此，也就可以用 $\dot{y}$ 來代表質點的動量。所以，$y$ 和 $\dot{y}$ 就分別代表質點的位置和動量。物理學家把這樣一種不用時間變數 $t$ 的狀態表示法稱爲相空間中的表示法。在我們所討論的特殊情形中，相空間只是二維的($y$ 和 $\dot{y}$)，所以，它就是相平面。這樣一來，二階系統(10.10)的運動狀態就可以用相平面上的一條曲綫來描述。這條曲綫上的每一點都表示系統在某一個時刻 $t$ 的狀態。根據一般的習慣，在這條曲綫上，我們用箭頭表示時間增加的方向，就像圖 10.11 所畫的那樣。如果系統的階數 $n$ 大於 2，相空間就是 $n$ 維的，系統的運動狀態就要用這個 $n$ 維空間中一條曲綫來表示。

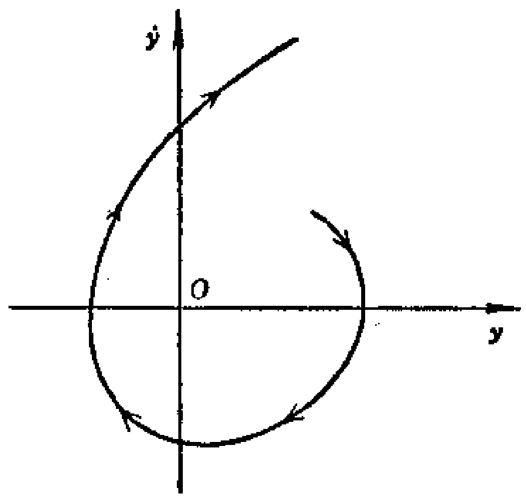


圖 10.11

相平面表示法的具體優點就是：非常多的二階非綫性系統都是自持的，而且都能表示成方程(10.11)的形式。這個方程至少總可以用等傾法[1]把解用圖綫表示出來。事實上，只要把方程(10.11)所規定的曲綫的方向場在相平面上表示出來以後，系統的特性就很清楚了。相平面的這樣一些性質的應用是非綫性振動理論的基本方法之一。這種方法稱爲非綫性力學

的拓樸方法[1].

爲了把以前的一些概念改用相平面的方法來表示. 我們舉一個例子:考慮一個沒有驅動函數的二階綫性系統

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\frac{dy}{dt} + y = 0, \tag{10.12}$$

只要把時間的量度單位適當地加以選擇就可以使方程(3.39)中的自然頻率 $\omega_0$ 等於 1, 因而就得出方程(10.12). $\zeta$ 當然就是系統的阻尼與臨界阻尼的比值. 對於振盪的情形來說, $|\zeta| < 1$. 可以把方程(10.12)改寫成

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\dot{y}}{dt} &= -2\zeta\dot{y} - y,\\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y}.\end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

因此,我們就得到相當於方程(10.11)的方程:

$$\frac{d\dot{y}}{dy} = -\frac{2\zeta\dot{y} + y}{\dot{y}} = -2\zeta - \frac{y}{\dot{y}}. \tag{10.14}$$

根據方程(10.14), 不難看出, 曲綫斜率 $d\dot{y}/dy$ 只在從相平面的原點出發的每一條射綫上是相同的常數. 圖 10.12 到 10.16 所畫的是五種不同的運動類型, 它們分別相當於

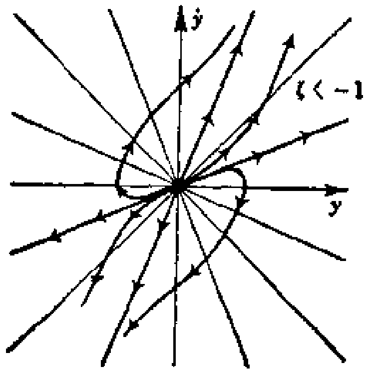



圖 10.12

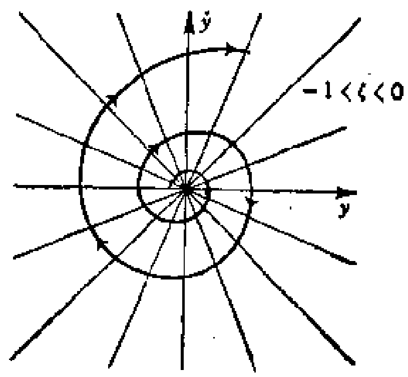



圖 10.13

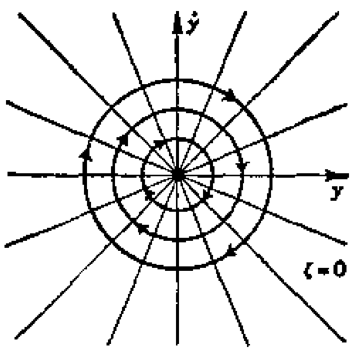



圖 10.14

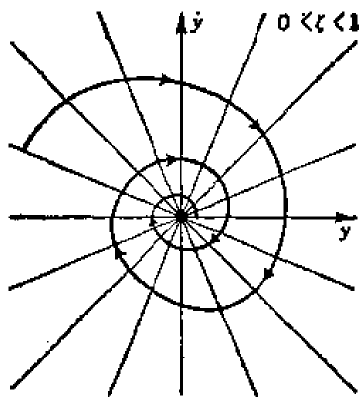



圖 10.15

1) 參閱 J. J. Stoker, "Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems", New York (1950),(俄文譯本[46]或[1]).

$\zeta < -1$, $-1 < \zeta < 0$, $\zeta = 0$, $0 < \zeta < 1$ 以及 $1 < \zeta$. 圖 10.12 和圖 10.16 是非振盪的情形. 圖 10.13 到 10.15 都是振盪的情形. 圖 10.14 是真正的簡諧振盪.

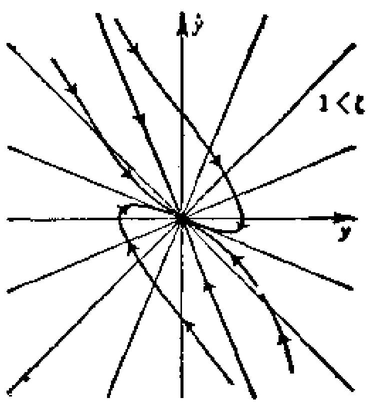



圖 10.16

在以上所畫的這些圖裏，相平面的原點相當於平衡狀態，因爲在這一點 $dy/dt$ 和 $d\dot{y}/dt$ 都等於零. 用數學的術語來說,原點是方程(10.13)的奇點. 然而,在 $\zeta < 0$, $\zeta = 0$ 和 $\zeta > 0$ 這三種不同的情形下，平衡狀態的特性是十分不同的. 圖 10.12 和圖 10.13 表明，當 $\zeta < 0$ 時，系統的運動曲綫總是從平衡狀態發散出去的. 所以,原點是一個不穩定的平衡點. 圖 10.15 和圖 10.16 表明,當 $\zeta > 0$ 時，系統的運動曲綫總是收斂到平衡狀態上來的，所以原點就是一個穩定的平衡點. 用數學的術語來說，在圖 10.12 和圖 10.16 中,因爲原點是所有運動曲綫都要經過的,所以稱爲結點. 圖 10.13 和圖 10.15 的原點是螺綫的中心,這時,它被稱爲焦點. 在圖 10.14 的特殊情形中，$\zeta = 0$,運動曲綫總是把原點包圍在內部，這時，原點就稱爲中心點.

如果二階系統的基本方程有一個常數驅動項,也就是說.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\frac{dy}{dt} + y = c, \tag{10.15}$$

這裏的 $c$ 是一個常數. 這時也就有

$$\frac{d^2(y-c)}{dt^2} + 2\zeta\frac{d(y-c)}{dt} + (y-c) = 0.$$

因此，相平面上的運動曲綫和圖 10.12 到圖 10.16 所畫的完全相似，只不過把平衡點改爲 $y$ 軸上的 $y = c$ 點就是了.

## 10.6 綫性開關

在以下的討論中，爲了簡化繼電器的開關問題的討論，我們假設繼電器只能有兩種狀態：單位大小的正輸出和單位大小的負輸出. 沒有輸出等於零的情形. 不難瞭解，輸出總是單位大小的假設並不會限制問題的普遍性.

在討論最優開關問題之前，我們先來考慮比較簡單的綫性開關的情形，所謂"綫性開關"，就是：繼電器所產生的輸出驅動函數 $c$ 的大小總是一. $|c| = 1$. 而且這個輸出的符號與 $ay + b\dot{y}$ 的符號相同. 在這裏討論綫性開關的目的就是想藉此說明開關問題的一些特點.

在弗呂格-羅茨(I. Flügge-Lotz)的論文[1]以及弗呂格-羅茨與克羅特爾(K. Klotter)合著的論文[2]中都分析過有綫性開關的繼電器的伺服系統的運動狀態. 以下的討論就是他們在定性方面的研究結果的簡單總結.

這兩位作者所研究過的系統的微分方程是

1) I. Flügge-Lotz, *ZAMM*, **25—27**, 97—113 (1947).

2) I. Flügge-Lotz and K. Klotter, *ZAMM*, **28**, 317—337 (1948).

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\zeta\frac{dy}{dt}+y=\mathrm{sgn}\,(ay+b\dot{y})\quad 0<\zeta<1. \tag{10.16}$$

當驅動函數是 +1 時，那末，相平面上的一條相當的運動曲綫弧就稱爲一個正弧(簡寫爲 $P$)．反之，當驅動函數是 −1 時，相當的一條運動曲綫弧就稱爲一個負弧(簡寫爲 $N$)．所有的正弧的總體稱爲正系統．所有負弧的總體稱爲負系統．根據我們對方程(10.15)的討論，已經知道，方程(10.16)的正系統是由收斂的螺綫所組成的，這些螺綫的焦點都是 $y=+1$，$\dot{y}=0$；方程(10.16)的負系統也是由收斂的螺綫所組成的，這些螺綫的焦點都是 $y=-1$，$\dot{y}=0$．我們當然希望系統的最終狀態就是原點，$y=\dot{y}=0$．

按照方程(10.16)右端的開關函數中 $a$ 與 $b$ 的符號，可以規定四種情形．

我們把 $a>b$，$b>0$ 的情形稱爲第一種情形．這時，開關曲綫 $ay+b\dot{y}=0$ 是一條經過相平面的原點而且位置是在第二象限和第四象限內的直綫．在這條直綫的右方 $ay+b\dot{y}$ 是正數．所以，那裏是一個正系統的區域．在這條直綫的左方，$ay+b\dot{y}$ 是負數，所以，是一個負系統的區域．在這條開關綫上，正系統和負系統連接起來，而且，運動曲綫的隅角(即正弧與負弧的連接點)也發生在這條綫上(圖 10.17)．存在周期解的條件就是：存在一個正弧，這個正弧與開關綫的兩個交點與原點距離相等．理由是這樣的：如果確實存在這樣一個正弧，那末，根據對稱性，在開關曲綫的另一方也必然有一個連結這兩個交點的負弧．因此，這兩個弧就組成一條相平面上的閉合曲綫．用非綫性力學的術語來說，這種周期解就稱爲極限環．在以下的討論中我們就會看到，在所考慮的情形中確實可以發生周期解．

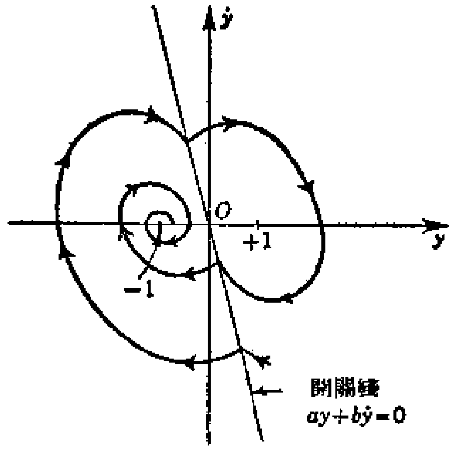


圖 10.17

不難看出，總會有一個正弧和一個負弧與開關曲綫相切，設這兩個切點分別是 $S_P$ 和 $S_N$ (圖 10.18)．而且，設這兩個弧與開關曲綫的另外的交點分別是 $R_P$ 和 $R_N$．$S_P$ 與 $S_N$ 對於原點是對稱的．$R_P$ 與 $R_N$ 也是這樣的．先假設 $\zeta$，$a$ 和 $b$ 之間的關係，使得 $R_N$ 點在 $S_PS_N$ 綫段之外(就像圖 10.18 的情形)．這時，如果某一個解在開關曲綫上的起點與 $S_PS_N$ 綫段足够接近，那末，經過這個點的運動曲綫必然在開關曲綫的左方或右方離開開關曲綫，不再與開關曲綫相交．至於在哪一方離開開關綫就要由起點的位置來確定．譬如說，起點在 $S_N$ 與 $R_P$ 之間，那末，經過這個點的運動曲綫就在開關曲綫的右方離開開關綫．我們也可以證明，如果開關綫右方的正弧與開關曲綫相交於兩點，那末，這個弧的終點(第二個交點)到原點的距離小於起點(第一個交點)到原點的距離．因此，永遠不可能滿足有周期解的條件．所以，系統的運動曲綫永遠是圍繞某一個焦點的螺綫，因此，最終狀態不可能是相平面的原點．

但是，如果 $R_N$ 和 $R_P$ 都在 $S_PS_N$ 綫段上(圖 10.19)，就存在一個周期解．理由是這樣的：根據我們的假設，正弧 $R_PS_P$ 的起點 $R_P$ 到原點的距離小於終點 $S_P$ 到原點的距離．

但是，把圖 10.15 的收斂螺綫的焦點從原點移到 +1 點(相當於正弧)和 −1 點(相當於負弧)的手續對於離原點很遠的部分影響非常小. 所以，如果一個正弧在開關綫上的起點離原點非常遠，那末，這個弧在開關綫上的終點與原點的距離就比較近一些(這是螺綫的性質). 因此，這種弧與 $R_PS_P$ 弧的性質剛好相反. 因爲曲綫之間的變化是連續的，所以，一

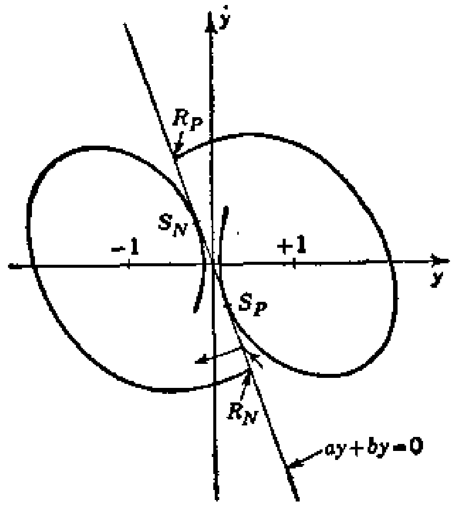



圖 10.18

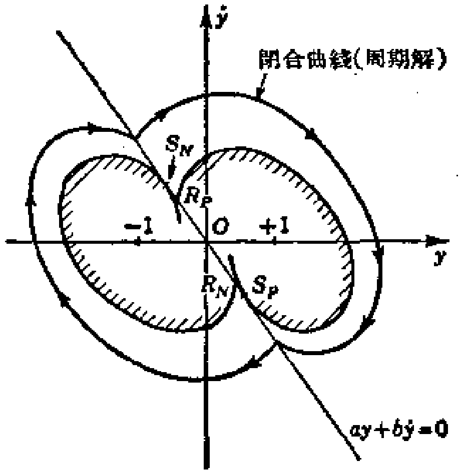



圖 10.19

定有一個中間狀態的正弧，這個正弧的起點和終點與原點的距離相等. 這就是存在周期解的條件. 圖(10.19)中所畫的閉合曲綫就是這個周期解. 事實上，已經作過的數學分析不但證明了上述的事實，而且還進一步證明：這個周期解不只是唯一的，而更重要的是，這個解還是軌道穩定的，具體地說：所有初始點在這個閉合曲綫外面的解，最後都趨近於這個周期解；所有初始點在這個閉合曲綫內部而在閉曲綫 $R_PS_PR_NS_NR_P$ 所包圍的區域(也就是圖 10.19 的陰影區域)之外的解，最後也趨近於這個周期解. 初始點在閉曲綫 $R_PS_PR_NS_NR_P$ 內部的運動曲綫最後總是趨近於某一個焦點，也還是沒有趨近於原點的可能性.

第二種情形就是 $a>0$ 而 $b<0$ 的情形. 這時，開關曲綫 $ay+b\dot{y}=0$ 經過第一象限和第三象限. 正系統和負系統與前一種情形是一樣的. 在這種情形中不可能有周期解. $R_P$, $R_N$, $S_P$ 和 $S_N$ 的定義也與以前相同. 這些點和原點在開關綫上的位置的順序是 $R_P$, $S_P$, $O$, $S_N$, $R_N$；圖 10.20 所畫的就是這種情形. 在 $S_PS_N$ 綫段上有一種新的現象：我們來考慮一個在 $E$ 點與這個綫段相交的解($E$ 點是 $S_PS_N$ 上某一點). 假設這個解與開關綫的相互位置就像圖 10.20 所畫的那樣，那末，這個解在 $E$ 點將會怎樣呢？ 既然 $E$ 點在開關綫上，照道理講，到達 $E$ 點以後，表示系統運動狀態的動點就應該沿一個負弧前進. 但是，從 $E$ 點開始的負弧又會使動點再回到原來的半平面(也就是到達 $E$ 點以前所在的半平面)上來，可是，在這個半平面上 $ay+b\dot{y}>0$，解只能由正弧組成，所以，到達 $E$ 點以後，動點不可能再沿負弧前進；另一方面，動點到達 $E$ 點以後也一定不能再繼續沿正弧前進，因爲只有剛剛走過的路綫是經過 $E$ 點的唯一的正弧. 因此，我們可以說，$E$ 點以後的解是不存在的，或者說，解在 $E$ 點終止. 任何一個從 $R_PR_N$ 綫段的外部開始的解，

在沒有與 $R_PR_N$ 綫段相交之前總是旋轉地逐漸接近原點. 最後,如果這個解與 $S_PR_P$ 相交,它就趨近於 +1;如果,與 $S_NR_N$ 相交,它就趨近於 −1 點;如果這個解最後與 $S_PS_N$ 相交,那就會發生古怪的"終止"現象. 在"終止"的情況下,系統的"位置"和"速度"都固定不變,這當然是不合情理的事情.

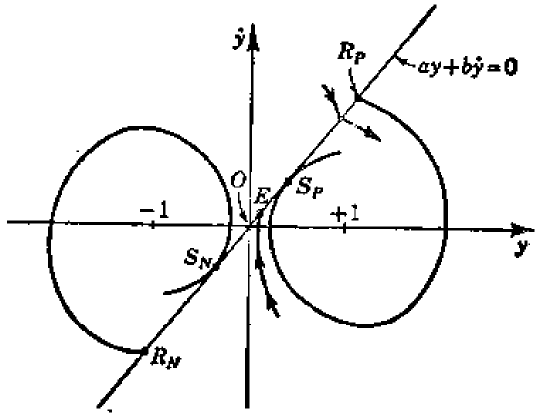



圖 10.20

其實,在眞實情況中,系統的運動狀態是不可能"終止"的,它總是要在時間過程中進行的. 得出上述的荒謬結果的理由也是可以解釋的:因爲實際的開關動作總是有時滯的,所以,一個解與開關綫相交時驅動函數並不立刻改變符號,所以解還要繼續前進一段時間,在這一段繼續前進的時間中驅動函數還保持原來的符號. 在第一種情形中,因爲這樣一個時滯不很大,所以對系統的基本運動狀態沒有什麼影響,但是,在現在的情形中,時滯就可以使系統的解避免發生"終止"現象. 現在我們來觀察一個到達"終止點"的解. 由於時滯的緣故,解不再在這一點終止,而要繼續前進某一段距離,然後才發生開關動作,開關動作就使解在相平面上畫出一個隅角,但是,在隅角上解還是存在的. 從這個隅角出發,解又在相反的方向上越過開關綫,解越過開關綫一個短的距離以後,又在相平面上畫出另一個隅角,以後的過程也是類似的,就像圖 10.21 所畫的那樣. 從這個圖也可以看到,這種"鋸齒狀"的運動,最後就使得系統"爬出" $S_PS_N$ 區域,最後,解就趨近於某一個焦點. 所以,時滯可以消除解的終止現象,但是,系統的運動狀態還是不能令人滿意的,因爲,解還是不能最後到達原點.

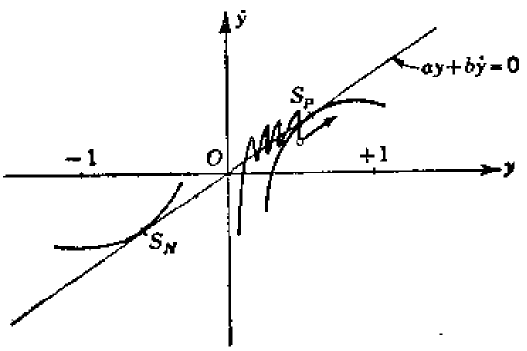



圖 10.21

在第三種情形中,$a<0$,而 $b>0$. 這種情形的開關綫也是通過相平面的第一象限和第三象限的,但是,現在的正系統在開關綫的左方,負系統在開關綫的右方.(這與第二種情形恰好相反). 在這種情形中,總是存在一個穩定的周期解(或者說是一個穩定的極限環)(圖 10.22),而且,這個周期解就決定了所有的情況,因爲,所有其他的解最後都趨近於這個周期解. 所以,在這種情形裏,還是不能使系統達到相平面的原點.

第四種情形就是 $a<0$ 同時 $b<0$ 的情形. 這種情形的開關綫與第一種情形相同,而正弧和負弧的分佈狀態與第三種情形相同. 可以證明,在這種情形中不可能有周期解. 如果,開關動作沒有時滯,那末,$S_PS_N$ 綫段(圖 10.23)就是由終止點組成的. 如果,從 $S_PS_N$ 綫段上每一點出發向後(也就是在時間減小的方向上)描畫解的圖綫,就可以看到這些曲綫蓋滿了全平面,這也就是說,所有的解都"終止"在開關綫的 $S_PS_N$ 綫段上.

但是,這裏也和第二種情形一樣,時滯的存在就使情況大不相同了. 當解還沒有到達 $S_PS_N$ 綫段的時候. 時滯並沒有什麼重要作用;但是,當解到達 $S_PS_N$ 綫段時,時滯就使解不再終止,而能使解越過開關綫一段不大的距離. 然而,畫出一個隅角,接着又越過開關綫. 又作出另一個隅角,以後還是這樣繼續下去. 從圖 10.23 可以看出,這種鋸齒狀的運動就使系統的運動狀態趨近於原點,最後,系統就在原點附近作頻率高振幅小的振動. 時滯越小,振動的頻率就越高. 這種狀態就稱爲繼電器伺服系統的顫震.

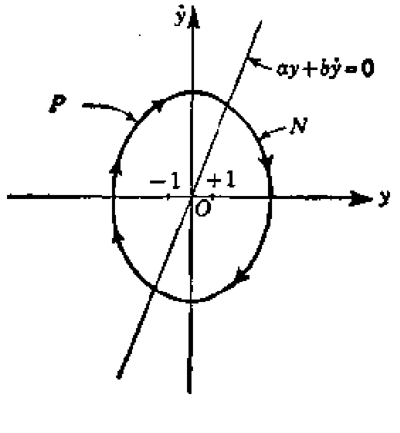



圖 10.22

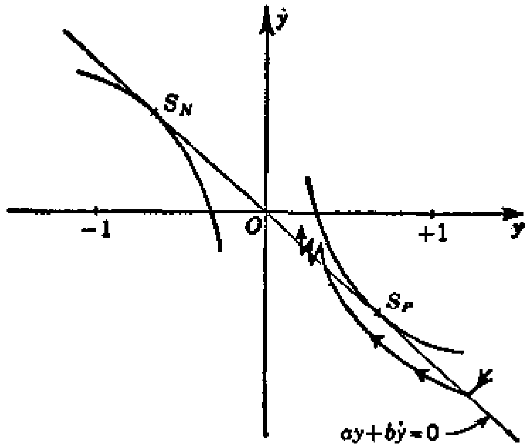



圖 10.23

這樣一來,我們就看出,討論過的四種情形中,只有第四種情形能使系統趨於所希望的平衡狀態,但是,即使如此,系統還是在平衡狀態附近顫震.

以上就是弗呂格-羅茨和克羅特爾的理論分析的介紹,從這個介紹裏,就可以看出綫性開關的缺點,同時也就會知道,使伺服系統具有最優運轉狀態的最優開關函數一定不會是綫性開關函數. 以下各節的討論就可以使我們更清楚地瞭解這方面的問題.

## 10.7 最優開關函數

如果一個二階自持系統的驅動函數的大小總是一,那末,這個系統的方程就可以寫成

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, \\ \frac{d\dot{y}}{dt} + g(y, \dot{y}) &= \varphi(y, \dot{y}), \end{aligned}\right\} \tag{10.17}$$

其中 $\varphi(y, \dot{y})$ 是一個不連續的函數,它只能取 $+1$ 和 $-1$ 這兩個函數值. 這時,就可以提出這樣一個最優開關問題:要求找出一個函數 $\varphi(y, \dot{y})$,使得方程(10.17)的經過相平面上任何一點 $p$ 的解都能經過原點 0,而且,沿着這條經過 $p$ 的解的路綫,從 $p$ 變動到 0 所需要的時間對於 $\varphi$ 來說是極小的,也就是說,任何一個其他的函數 $\varphi$ 都不能使這個時間更短一些. 這樣求出函數 $\varphi(y, \dot{y})$ 就是這個特殊問題"最優開關函數". 這個特別的開關問題曾經被布紹(D. W. Bushaw)研究過[1],而且,對於 $g(y, \dot{y})$ 的綫性的特殊情形 $g(y, \dot{y}) = 2\zeta\dot{y} + y$ ($\zeta$ 是任何實數),他給出了完全的解答[2]. 然而,布紹所用的數學方法非常複雜,

1) D. W. Bushaw, Experimental Towing Tank, Stevens Institute of Technology Report 469, Hoboken, N. J. 1953.

2) 參閱[44, 47, 48],也可以參閱[5].

而且很難推廣到其他的情形中去，所以，在以下的討論中，我們只限於說明他所得的結果．

只要 $g(y,\dot{y})$ 是連續函數，那末，布紹所提出的正則路綫的概念就是一個很有用的普遍概念．所謂路綫就是相平面上的運動曲綫．既然 $\varphi(y,\dot{y})$ 只能取 $+1$ 和 $-1$ 兩個值，所以一個路綫只是由正弧和負弧組成的．在時間增加的過程中，當驅動函數從 $+1$ 變爲 $-1$ 時，路綫就由一個正弧轉到一個負弧上去，這兩個弧的交點就稱爲一個正負隅角．類似地，相當於開關函數從 $-1$ 變到 $+1$ 的交點就稱爲負正隅角．如果一條路綫在 $y$ 軸的上方不包含負正隅角而且在 $y$ 軸的下方不包含正負隅角，那末，這條路綫就稱爲正則路綫．正則路綫的重要性在於：極小路綫（所用的時間是極小值的路綫）一定是正則路綫．這也就是說，如果從 $p$ 點出發給定一條不是正則的路綫 $\Delta$，

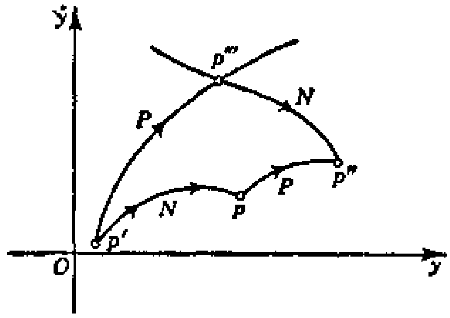



圖 10.24

那末，總可以找到一條從 $p$ 出發的正則路綫，經過這條路綫所用的時間比經過 $\Delta$ 所用的時間短．這是很容易證明的．譬如說，一條路綫在 $y$ 軸上方有一個負正隅角 $p$．就像圖 10.24 所畫的那樣．用 $p'$ 表示路綫在 $p$ 點以前的最後一個隅角或者路綫與 $y$ 軸的交點，這兩個點中哪一點離 $p$ 比較近，就規定 $p'$ 是那一點．在 $p$ 點以後的相當點用 $p''$ 表示．從 $p'$ 點出發向前畫一條正路綫，再從 $p''$ 點出發向後畫一條負路綫，這兩條路綫相交於 $p'''$ 點．根據基本方程(10.17)我們就有：

$$\frac{d\dot{y}}{dy}=\frac{-g(y,\dot{y})+\varphi(y,\dot{y})}{\dot{y}}. \tag{10.18}$$

因此，在相平面上的任何一點正路綫的斜率的代數值總是大於負路綫的斜率的代數值．所以，路綫之間的幾何形式就是圖 10.24 所畫的那種情形．如果我們把給定的路綫 $p'pp''$ 改爲 $p'p'''p''$，那末，路綫在 $y$ 軸上方的負正隅角 $p$ 就被消除掉了，因而也就變成正則路綫．如果我們用 $t(p'pp'')$ 表示從 $p'$ 經過 $p$ 到 $p''$ 所用的時間，用 $t(p'p'''p'')$ 表示經過正則路綫 $p'p'''p''$ 所用的時間，那末

$$t(p'pp'')=\int_{p'pp''}\frac{dy}{\dot{y}},$$
$$t(p'p'''p'')=\int_{p'p'''p''}\frac{dy}{\dot{y}}.$$

但是，對於任何一個固定的 $y$ 值來說，正則路綫上的 $\dot{y}$ 值總是大於原來的路綫 $(p'pp'')$ 上的 $\dot{y}$ 值；因而，$t(p'p'''p'')<t(p'pp'')$．所以，正則路綫比非正則路綫"短"．

作爲應用最優開關函數理論的一個簡單例子，我們取 $g(y,\dot{y})=\zeta\dot{y}$．於是，方程組(10.17)變爲

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=\dot{y},\\ \frac{d\dot{y}}{dt}&=-\zeta\dot{y}+\varphi(y,\dot{y}).\end{aligned}\right\} \tag{10.19}$$

路綫弧的正系統和負系統當然與 $\zeta$ 值有關；但是，由於方程組(10.19)中不明顯地包含 $y$，所以，弧的系統所包含的弧都是沿 $y$ 軸方向移動而得出的平行曲綫． 在圖 10.25 中，對於 $\zeta$ 值的三種可能的情形，畫出了通過原點的一個典型的正弧和一個典型的負弧．$\zeta<0$ 的情形與其餘兩種情形不同，如果要求最後到達原點，那末 $\dot{y}$ 的初始值就必須在 $-1/\zeta$ 與 $+1/\zeta$ 之間． 所以，對於這種情形來說，只有當 $\dot{y}$ 的初始值在所說的範圍內的時候，最優開關問題才有意義．

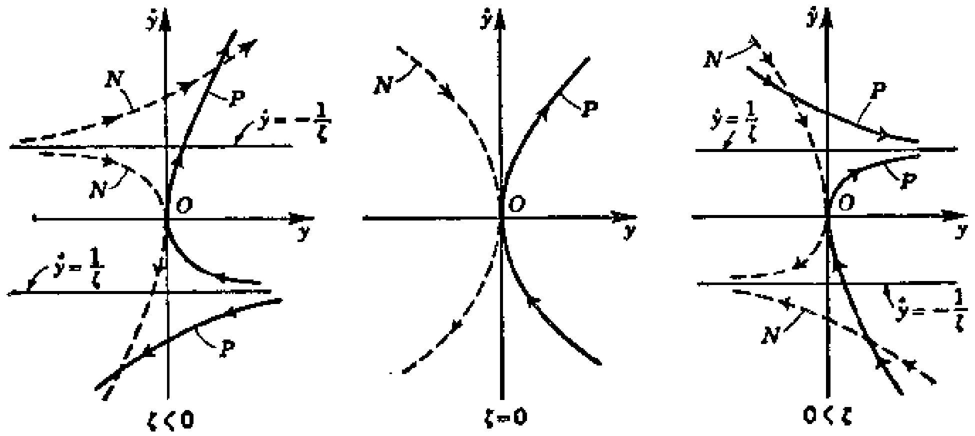



圖 10.25

我們用 $\Gamma$ 表示經過原點的正路綫在 $y$ 軸下方的那一部分，用 $\Gamma^-$ 表示 $\Gamma$ 對原點的"反射"(對稱曲綫)． 所以，$\Gamma^-$ 就是經過原點的負路綫在 $y$ 軸上方的部分． $\Gamma$ 和 $\Gamma^-$ 組成一個曲綫 $C$． 如果在某一條曲綫的上方開關函數 $\varphi(y,\dot{y})$ 取 $-1$ 值，在這條曲綫的下方，開關函數 $\varphi(y,\dot{y})$ 取 $+1$ 值，這條曲綫就稱爲**開關曲綫**；布紹證明，上述的曲綫 $C$ 就是最優開關曲綫．圖 10.26 所畫的就是這種情形． 開關動作的物理過程是這樣的：從 $C$ 上方的任何一點 $p$ 開始，驅動函數的值是 $-1$，系統的運動狀態就沿着一個負弧到達開關曲綫 $C$． 這時驅動函數的值就變爲 $+1$，然後，系統就沿着 $C$ 最後達到原點． 如果初始點 $p$ 在 $C$ 的下方，驅動函數的值是 $+1$． 於是系統就沿着一個正弧到達開關曲綫 $C$． 在開關綫上，驅動函數的值變爲 $-1$，然後系統就沿着 $C$ 達到原點．

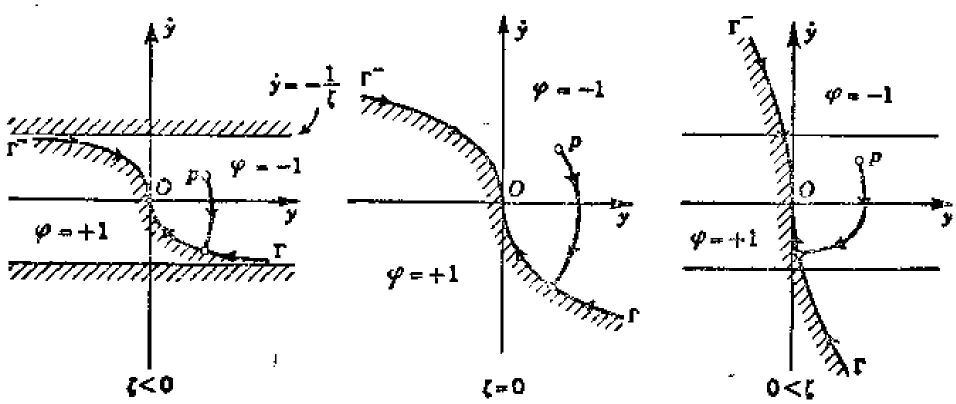



圖 10.26

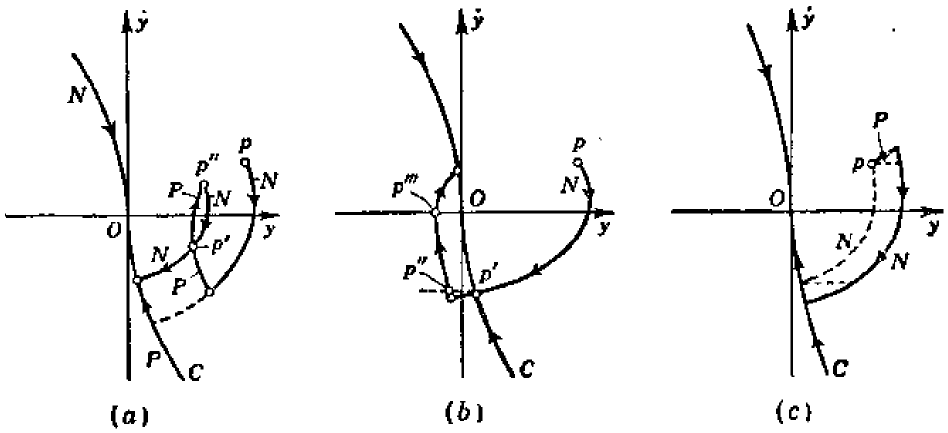



圖 10.27

從以下的說明中，就可以看到布紹所解出的最優開關曲綫是正確的．首先，我們都知道，爲了達到原點，路綫的最後一部分必須是 $C$，因爲只有 $C$ 是通過原點的路綫．假定初始點在 $C$ 的上方，按照布紹的結果，最優路綫的第一部分是一個從 $p$ 到 $C$ 的負弧，第二部分就是沿着 $C$ 到達原點的路綫．這也就是圖 10.27($a$) 中包含虛綫部分的路綫．如果開關動作開始得太早，在到達 $C$ 之前就會有一個負正隅角．爲了到達原點，我們還必須使開關動作再進行一次，因而也就要再作出一個正負隅角．如果這個開關動作在 $p'$ 點發生，這時 $\dot{y}$ 還是負數，這就使路綫不能滿足正則路綫的條件．因此，在這條變化了的路綫上所用的時間一定比最優路綫長．如果正負隅角在 $p''$ 點，這時 $\dot{y}$ 是正數，然而，沿這條路綫到達原點所用的時間還要更長一些，因爲在這條路綫中還更多包含了一條花費時間的閉路綫．這樣我們就可以看出：過早的開關動作是不利的．圖 10.27($b$) 表示的是開關動作過遲發生的情形．既然 $p'O$ 和 $p''p'''$ 這兩條路綫是平行的，經過這兩條路綫的所用時間也應該是一樣長的，所以，從圖 10.27($b$) 來看，過遲發生開關動作也是有害的．圖 10.27($c$) 所表示的又是另一種情形，這時，路綫的第一部分就是一個正弧而不是負弧．可是，從圖形上就能明顯地看出，這個情形也比最優路綫的情形壞．以上的各種考慮表明，選取正則路綫爲最優路綫的作法是正確的．

## 10.8 二階綫性系統的最優開關曲綫

布紹把 $g(y, \dot{y}) = 2\zeta\dot{y} + y$（$\zeta$ 可以是任意實數）的二階綫性系統的最優開關曲綫具體地確定出來．在這裏，我們只敍述他的結果而不加以證明；但是，從上一節關於簡單情形的討論來看，所要介紹的結果的一般性質也是不難理解的．對於這個 $g(y, \dot{y})$ 來說，正系統和負系統就是把圖 10.12 到圖 10.16 中的原點分別移到 $(+1, 0)$ 點和 $(-1, 0)$ 點所得到的兩族曲綫．

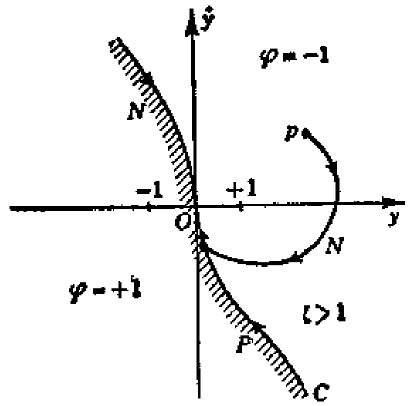



圖 10.28

和上一節的簡單情形最相像的就是 $\zeta > 1$ 的情形．開關曲綫是由一條從相平面上的無限遠處到原點的正弧和一條從無限遠處到原點的負弧

組成的．和上一節一樣．在$C$的上方，開關函數$\varphi$的值是$-1$；在$C$的下方，$\varphi$的值是$+1$．如果初始點在$C$的上方，最優路綫就是像圖 10.28 所畫的那樣．

當$\zeta<-1$時，也和上一節的簡單情形一樣，只有當初始點在相平面的一個有限的區域之內時，系統才能最後到達原點；這是因為當沒有驅動函數$\varphi$的時候，系統是不穩定的緣故．布紹證明：這個區域的邊界是由兩個弧組成的：一個弧是從$(+1, 0)$點到$(-1, 0)$點的正弧，另一個弧是從$(-1, 0)$點到$(+1, 0)$點的負弧．圖 10.29 所畫的就是這種情形．只有當初始點在這個區域內的時候，開關問題才有意義．最優開關曲綫$C$是由一條走向原點的正弧和一條走向原點的負弧組成的．在$C$的上方，開關函數$\varphi$等於$-1$，在$C$的下方，$\varphi$等於$+1$．圖 10.29 畫出了一條初始點$p$在$C$上方的最優路綫．

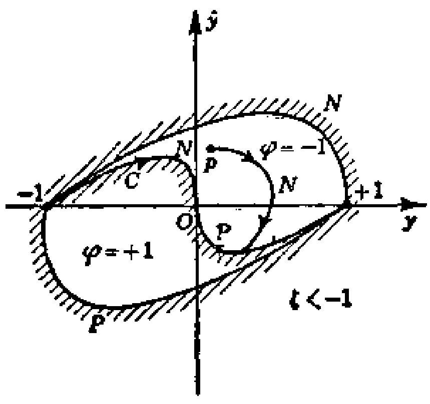


圖 10.29

當$\zeta=0$時，正系統和負系統分別是以$(+1, 0)$點和$(-1, 0)$點為中心的無限多個圓．最優開關曲綫$C$是一系列半徑是一的半圓弧(圖 10.30)，這一系列半圓從原點出發沿着$y$軸向左右兩個方向無限地伸延出去．在$y$是正數的部分，這些半圓都在$y$軸的下方；在$y$是負數的部分，這些半圓都在$y$軸的上方．在$C$的上方，開關函數$\varphi$等於$-1$，在$C$的下方，$\varphi$等於$+1$．從圖 10.30 中所畫的那樣一個$p$點出發，路綫的第一部分是一個負弧，負弧當然就是一個以$(-1, 0)$點為心的圓弧．當路綫與$C$在$a$點相交的時候，路綫就變成一個正弧，正弧就是一個以$(+1, 0)$點為心的圓弧．然後，路綫又在$b$點與$C$相交，於是路綫又在$b$點變為負弧，接着，又在下一個交點處變為正弧，以後的過程也是類似的．路綫與$C$的最後一個交點是$d$，從$d$點開始，系統就沿着$C$到達原點．這樣一個開關動作的過程就比$\zeta>1$的情形複雜得多了．

$0<\zeta<1$的情形，也就是收斂螺綫的情形比以上的情形還要困難一些．對於這種情形，布紹證明最優開關曲綫的畫法是這樣的：我們先從原點開始沿着時間的反方向畫一條正螺綫．從原點到這條螺綫與$y$軸的第一個交點之間的螺綫弧就是$C$的第一個弧(圖 10.31)．既然，每一個$y$軸上方的螺綫弧都與$y$軸相交於兩點，我們就可以把每一個弧對於它的右邊的交點的反射圖形畫出來，這樣就得出一系列"反射"

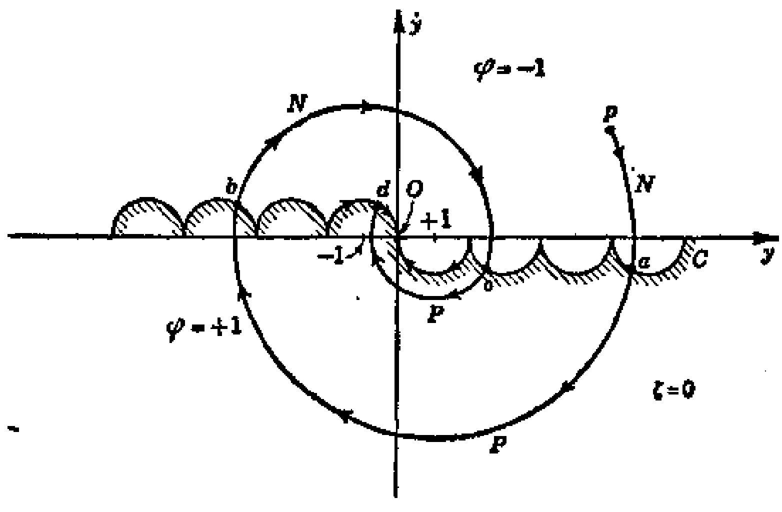


圖 10.30

的螺綫弧．最後，我們再把這些弧平行於 $y$ 軸移動，使它們按照次序首尾相接地排列成 $y$ 軸下面的一條連續曲綫，這條曲綫從原點開始向 $y$ 軸右方無限地延展下去．這就是最優開關曲綫的正半部分；把這條曲綫對於原點的反射圖形就是最優開關曲綫的負半部分．同樣，在這條開關曲綫 $C$ 的上方開關函數 $\varphi$ 等於 $-1$；在 $C$ 的下方，$\varphi$ 等於 $+1$ (圖 10.31)．這個情形和圖 10.30 所畫的 $\zeta=0$ 的情形是十分類似的，唯一的區別就是把半圓弧換成了螺綫弧．

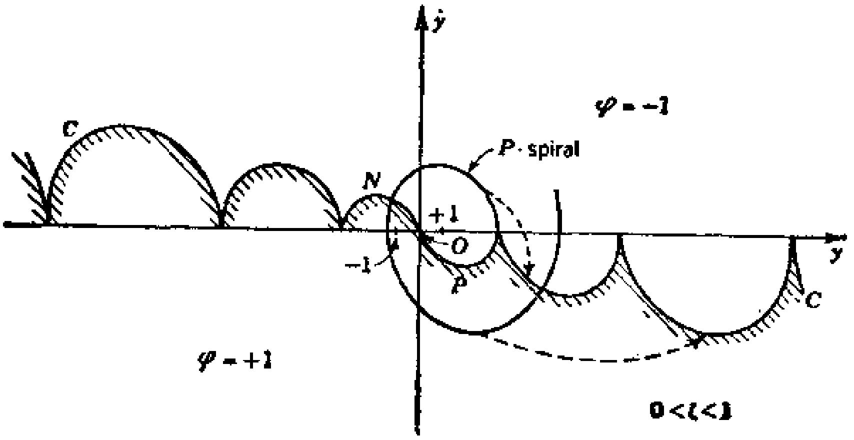



圖 10.31

最後一種情形就是發散螺綫的情形，這時 $-1<\zeta<0$．最優開關曲綫的作法基本上和前一種情形完全相同，不過這裏的一系列螺綫弧是越向外越小的，和前一種情形中越向外越大的情況恰好相反．雖然螺綫弧的個數是無限多的，但是開關曲綫所佔據的範圍却是有限的，正像圖 10.32 所畫的那樣，它的寬度只是在 $y$ 軸上的 $(-a,0)$ 點到 $(+a,0)$ 之間．事實當然也應該就是這樣的；因爲這裏的阻尼是負的，正像圖 10.29 的情形一樣，只有當初始點在原點附近的某一個有限的範圍之內時，路綫才能够最後到達原點．這裏的邊界是由一條從 $(+a,0)$ 到 $(-a,0)$ 的正弧和一條從 $(-a,0)$ 到 $(+a,0)$ 的負弧組成的．在開關曲綫 $C$ 的上方的相平面部分最優開關函數 $\varphi$ 取 $-1$ 值，在 $C$ 下方，$\varphi$ 取 $+1$ 值．

在圖 10.32 和圖 10.29 的情形中，可能有最優開關狀態的初始值的範圍都是有限的，而且這個範圍是由閉合的邊界曲綫所限定的，很顯然，這兩個閉曲綫都是在 $\dot{y}=0$ 發生開關動作的極限環．每一個都表示相當的繼電器伺服系統的一個周期解．但是，也可以明顯地看出：這樣的周期解是不穩定的：最微小的一點擾動都會使得系統的運動曲綫離開這個周期解，——或者趨近於原點，或者無限地發散出去．因此，實際上是不可能有周期解的．

在以上的最優開關問題的各種情形的解裏，我們看出一個共同的性質：在所有情形中，最優開關函數 $\varphi$ 在相平面的第一象限裏總是取 $-1$ 值，在第三象限裏總是取 $+1$ 值．把方程(10.19)寫成下列形狀，

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-2\zeta\frac{dy}{dt}-y+\varphi\left(y,\ \frac{dy}{dt}\right),$$

從這個方程就可以很容易看出上述共同性質的原因．我們的設計目的就是要求在儘可能短的時間內使系統回到 $y=0$ 的狀態(或 $t$ 軸)上去． 當 $y$ 和 $dy/dt$ 都是正數的時候，為

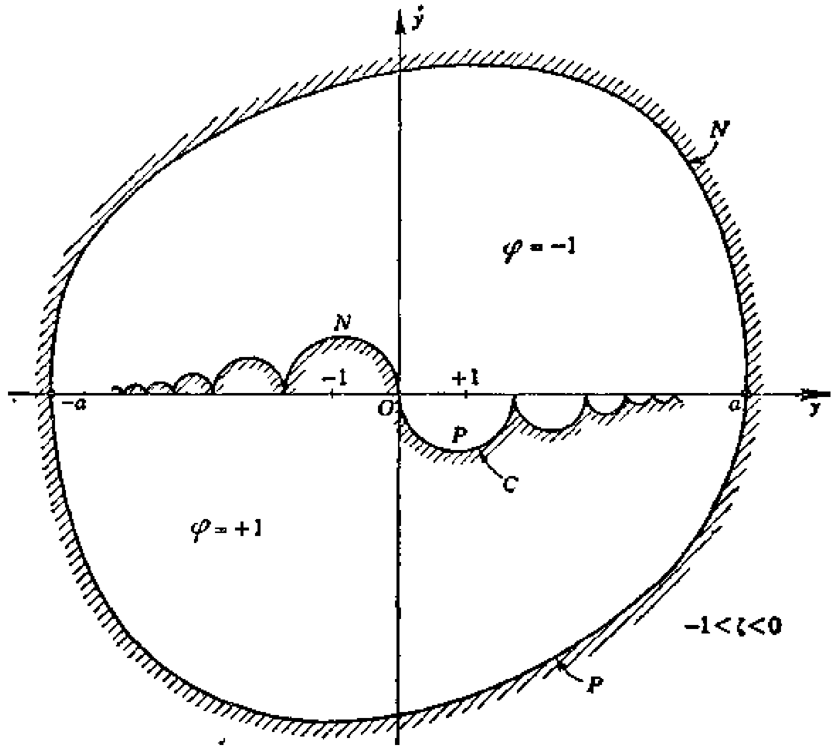



圖 10.32

了達到設計目的，我們就使 $d^2y/dt^2$ 或 $y(t)$ 的曲率是一個數值儘可能大的負數，所以 $\varphi$ 應該是 $-1$． 當 $y$ 和 $dy/dt$ 都是負數的時候，$d^2y/dt^2$ 就應該是一個儘可能大的正數，所以 $\varphi$ 應該是 $+1$．這樣一個直觀的推理與關於最優開關函數的嚴密結果是一致的． 當 $y$ 與 $dy/dt$ 的符號不相同時，最優開關函數 $\varphi$ 的值就不能這樣簡單地確定出來了，因為這時系統回到 $t$ 軸的速度與 $y$ 和 $\dot{y}$ 之間的複雜的交互作用有關；布紹的貢獻就在於把最優開關函數 $\varphi$ 在這一部分(相平面的第二象限和第四象限)也確定出來了． 但是，從這個討論我們可以肯定，最優開關曲綫 $C$ 一定在第二象限和第四象限裏．

對於階數更高的系統以及被控制變數的個數大於一的系統來說，就不能再用相平面來表示運動狀態了，對於這些情形，我們就必須用多維的相空間來表示運動狀態．利用與以上的討論相類似的辦法，我們相信，對於這些比較複雜的系統的最優開關問題也可以找到相空間中的最優開關曲面從而使問題得到解決．費特(G. H. Fett)和康(C. L Kang)對這個問題作過些初步的嘗試[1]．對於高階系統而言，描述系統的微分方程的特徵根是實數的情形，求最優開關曲面的問題已經由蘇聯學者費爾德包姆[5,27,43] (А. А. Фельдбаум) 等解決了． 至於方程的特徵根之中包含虛根的情形，求最優開關曲面的問題目前尚未解決．

1) C. L. Kang and G. H. Fett, *J. Appl. Phys.*, **24**, 38—41 (1953).

## 10.9 多方式的控制作用

當繼電器的開關動作使系統達到相平面的原點以後,系統的情況將會怎樣呢? 很明顯,如果系統到達原點以後,驅動函數還保持系統到達原點以前的數值,那末,系統就會又離開所需要的平衡狀態(原點);當系統又離開這個狀態以後,設計好的開關動作就會起作用,又把系統"拉"回原點,然後又重複這樣的運動. 所以,繼電器伺服系統的工作狀態就是:首先,從被擾動以後的位置很快地回到原點;然後,就在原點附近作高頻率的振動,這種振動就是顫震運動(參看第 10.6 節).

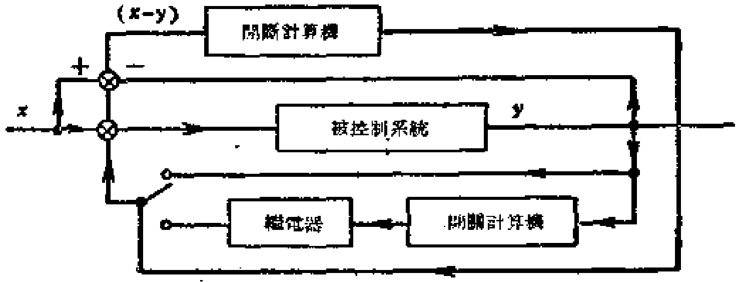



圖 10.33

如果離開平衡狀態(原點)的微小偏差在所考慮的問題中是可以容許的,那末,只要在離原點足够近(也就是 $y$ 和 $\dot{y}$ 已經小到可以忽略掉的程度)時把驅動函數 $\varphi$ 除掉,就可以避免原點附近的顫震. 如果採取這個作法,系統的控制作用就有兩種方式:當偏差大的時候,繼電器的開關動作與繼電器的輸出都起反饋控制作用;當偏差足够小的時候,系統的這種反饋輸入就被開斷了. 在以後各章裏,我們還會看到伺服系統的這種多方式控制作用的必要性.

因爲最優開關曲綫通常不是直綫,所以不能用簡單的綫性電路來控制繼電器的開關動作. 事實上,從輸出 $y(t)$ 測量出來的數據必須要被一個由非綫性裝置作成的開關計算機加以"改造". 這個計算機能够根據最優開關曲綫發出操縱繼電器的開關信號. 除此而外,還應該有一個開斷計算機;當系統的偏差離開靜止狀態或者原點很小的時候,開斷計算機就把繼電器的輸出從系統上開斷. 所以,這樣一個繼電器伺服系統的方塊圖就是圖 10.33[1]. 在以後各章中所討論的更複雜的控制系統中,計算機常常是重要的組成部分. 其實,從基本概念上來看,這並不是什麼新的方法;譬如說,爲了改善系統的傳遞函數而在普通的伺服系統中採用的補償電路實質上也是一個計算機. 當然,在這些比較簡單的控制系統裏,執行計算作用的只是一個綫性電路(例如,電阻電容電路)而已. 在第十三章裏,我們還要更廣泛地討論關於計算機的問題.

1) 關於非綫性反饋可以參閱[40, 49].

# 第十一章

# 非綫性系統

系統的輸入是 $x(t)$，輸出是 $y(t)$。如果輸入變爲 $cx(t)$（$c$ 是任何一個常數）時，輸出不成比例地變爲 $cy(t)$（也就是說，輸出與輸入不成比例），這個系統就是非綫性系統。繼電器伺服系統就是非綫性系統的一個簡單的例子。在第六章裏，我們曾經講過一種把任何一個非綫性伺服系統加以綫性化的普遍方法，具體地說，也就是把非綫性系統作成振盪控制伺服系統，從而使系統的運動性能與綫性系統相像。在上一章中，我們又提出了一個分析包含有非綫性的頻率遲鈍機構的伺服系統的方法。這些設計非綫性伺服系統的方法對於很大一批實際的非綫性工程問題都能適用，而且對於處理普通的系統的綜合問題來說也是很够用的了。

從另一方面來看，正像上一章的最後幾節所表示的那樣，最充分地利用系統的非綫性性質來改善系統的運轉性能的問題，通常要比只考慮穩定性的設計問題困難得多。事實上，對於這個問題的研究還只是剛剛開始，而且還沒有什麼重大的成就。所以，我們也不可能在這裏給出一個能够處理一般的非綫性伺服系統的完善方法。既然在目前不可能普遍地解決非綫性系統的分析問題，對待實際發生的非綫性問題採取一種不同的現實態度也許倒是更明智的：我們不再先假定已經有了一個已知的非綫性系統，然後直接去分析這個系統的運動性能，相反地，我們先把系統的運轉性能規定下來，然後，再來確定所需要的非綫性性質。我們將要在第十四章裏討論這種方法。現在這一章的範圍是很有限的，我們只來說明有目的地利用非綫性系統的特性的一些可能性。

### 11.1 有非綫性反饋的繼電器伺服系統

如果我們只限於考慮離開平衡狀態的偏差很小的情況，那末，在第 10.8 節中，介紹對於繼電器伺服系統的最優開關曲綫所得出的結果，就可以大爲簡化。從那一節的討論中可以看出，在原點附近，最優開關曲綫 $C$ 可以近似地表示成

$$\dot{y}\,|\dot{y}| = -2y. \tag{11.1}$$

這個結果表明，如果採用方程 (11.1) 所表示的非綫性開關曲綫就可以使系統的運轉性能比用綫性開關曲綫（第 10.6 節）的系統好。如果 $x$ 是輸入，$y$ 是輸出，那末，方程(11.1)就應該相應地改爲

$$a^2\dot{y}\,|\dot{y}| = x - y \tag{11.2}$$

或

$$\operatorname{sgn}(x-y)\sqrt{|x-y|} = a\dot{y}, \tag{11.3}$$

其中 $a$ 是常數。

採用方程 (11.2) 的開關條件的繼電器伺服系統的方塊圖就是圖 11.1 的那種情形，這

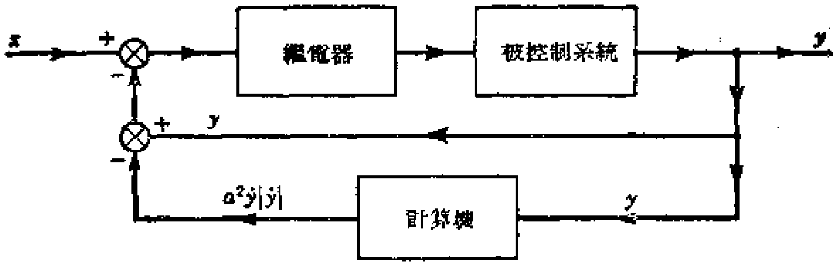



圖 11.1

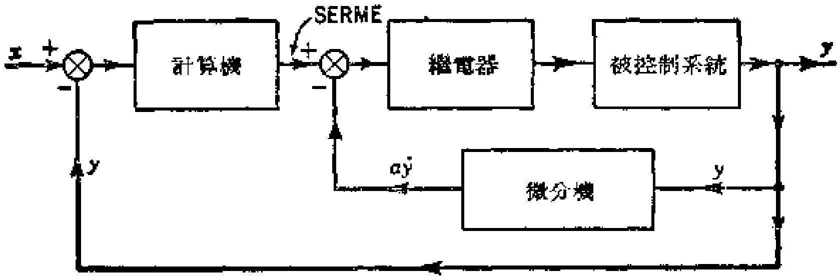



圖 11.2

種用 $\dot{y}|\dot{y}|$ 作反饋信號的方法是烏特萊(A. M. Uttley)和哈芒德 (P. H. Hammond)二人為改進簡單的繼電器伺服系統的性能而建議的[1]. 這裏，我們只要求計算機能產生 $a^2\dot{y}|\dot{y}|$ 信號,所以,這個計算機可以是相當簡單的. 方程(11.3)所表示的相當的開關條件可以根據反饋信號 $a\dot{y}$ 和反饋信號 $\mathrm{sgn}(x-y)\sqrt{|x-y|}$ 來執行. 因為 $x-y$ 是誤差，所以, $\mathrm{sgn}(x-y)\sqrt{|x-y|}$ 就稱為誤差符號誤差絕對值平方根, 簡稱為 SERME (這是誤差符號誤差絕對值平方根的英文名稱 sign error root-modulus error 的縮寫)；這個控制系統也就稱為**誤差符號誤差絕對值平方根系統**或 SERME **系統**. 圖 11.12 就是這個系統的方塊圖. 這裏的計算機也是相當簡單的. 這個系統是威斯特 (J. C. West)所建議的[2].

這些有非綫性反饋的繼電器伺服系統雖然都是比較簡單的,可是,還是無法加以嚴密的分析,其實,我們關於這些系統的優點所作的論述是相當含混的，並不是一個很完整很確切的論證;因此,利用這些方法設計出來的每一個個別的系統都必須經過試驗才能最後確定.

## 11.2 弱非綫性系統

現在，我們所考慮的 $n$ 階系統不是方程(2.3)所表示的那種綫性系統，而是一個有一些區別的非綫性系統,假定系統的微分方程是:

1) A. M. Uttley, P. H. Hammond, "Automatic and Manual Control", p. 285, (這個文集的編者是 A. Tustin), Butterworth & Co. Ltd., London (1952),(俄文譯本[40]).

2) J. C. West, "Automatic and Manual Control" (這個文集的編者是 A. Tustin), Butterworth & Co. Ltd., London (1952),(俄文譯本[40],第 296 頁).

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y$$
$$+\mu f\left(y,\frac{dy}{dt},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)=x(t) \tag{11.4}$$

其中的各個系數 $a$ 和 $\mu$ 都是常數，$x(t)$ 是輸入，$y(t)$ 是輸出，$f$ 是它的自變數的一個非綫性函數．方程(11.4)的左端的前一部分是一個與方程(2.3)的左端相同的綫性微分運算子，系統的全部非綫性性質都是由方程左端的後一部分 $\mu f$ 所表示的．我們當然可以假定方程(11.4)的變數 $t$ 已經是一個無量綱的時間變數了，所以，各個系數 $a$ 和 $\mu$ 的量綱都是相同的．所謂**弱非綫性**，也就是說，$\mu$ 比各個系數 $a$ 都小得多．

對於這種"弱非綫性"的情形，我們就可以設法把方程的解形式地寫成 $\mu$ 的冪級數的樣子：

$$y(t)=y^{(0)}(t)+\mu y^{(1)}(t)+\mu^2 y^{(2)}(t)+\cdots. \tag{11.5}$$

把方程(11.5)代入方程(11.4)，然後，再讓方程兩端的 $\mu$ 的同次方冪相等，就得出

$$a_n\frac{d^n y^{(0)}}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y^{(0)}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy^{(0)}}{dt}+a_0 y^{(0)}=x(t), \tag{11.6}$$

$$a_n\frac{d^n y^{(1)}}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y^{(1)}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy^{(1)}}{dt}+a_0 y^{(1)}=-f\left(y^{(0)},\cdots,\frac{d^{n-1}y^{(0)}}{dt^{n-1}}\right), \tag{11.7}$$

以及相當於 $\mu$ 的更高次方冪的一系列方程．所以，系統的運動方程的**第零次近似**(11.6)就是像方程(2.3)那樣的綫性方程．但是，更重要的事情是：由於非綫性性質而引起的第一次改正項是由方程(11.7)所確定的，從形式上就可以看出，這個方程與第零次近似[方程(11.6)]在特性上是完全一樣的．換言之，如果系統的第零次綫性近似(11.6)表明近似的系統 $y^{(0)}(t)$ 是有阻尼的，而且還具有伺服系統所必需的其他特性，那末**第一次改正項** $y^{(1)}(t)$ 也同樣具有這些特性．此外，因爲在展開式(11.5)中 $y^{(1)}(t)$ 之前有一個相當小的因數 $\mu$，所以，由於非綫性效應所必須作的改正是很小的．這也就是說，在一個性能良好的系統中，微弱的非綫性性質不會使系統的運轉狀態與它的綫性近似發生重大的差別．因此，從工程近似的觀點來看，我們就可以把這些系統當作綫性系統來處理．就是在工程實際中的"綫性"系統裏，也還是有一些微弱的非綫性性質的，但是，根據上面所講的道理，只用綫性伺服系統理論來研究這些系統也就可以得到很好的結果．

另一方面，如果近似的綫性系統的阻尼非常小，我們都知道，這時就有發生**共振現象**的可能性．也就是說，即使輸入 $x(t)$ 的數量級和 1 相同，$x\sim 1$，近似的綫性系統(11.6)的輸出 $y^{(0)}(t)$ 就可能比 1 大得很多，$y^{(0)}\gg 1$．在這種情形裏，雖然 $\mu$ 很小，可是 $\mu f\left(y^{(0)},\cdots,\frac{d^{n-1}y^{(0)}}{dt^{n-1}}\right)$ 這個數，或者說非綫性效應，仍然可以和綫性項的數量級相同．換句話說，我們在上一段裏所作的形式上的級數展開式就不能成立了，所以，在系統的阻尼作用很微弱的情形裏，即使非綫性性質很弱，我們也必須考慮到可能發生的強大影響．在以下各節裏，我們將要簡短地描述一下非綫性系統的多種多樣的運動狀態．非綫性力學中這樣一

些現象的詳細處理方法可以在米諾爾斯基(N. Minorsky)[1]與斯托克爾(J. J. Stoker)[2]的著作中找到.

## 11.3 跳躍現象

正像第10.2節所講過的那樣，如果系統的自激振盪能够由於離開平衡狀態的微小偏差而自動地形成，那末，它就稱爲軟的自激振盪；如果離開平衡狀態足够大的偏差才能引起自激振盪，這個自激振盪就稱爲硬的自激振盪．在某些情形裏，系統的微分方程的系數與系統的一個參數 $\lambda$ 有關．如果當 $\lambda$ 取某一個特別的臨界值 $\lambda_0$ 時，系統的平衡狀態的特性就從穩定狀態變爲不穩定狀態．那末，在 $\lambda \geq \lambda_0$ 的時候就會出現極限環，也就是自激振盪．

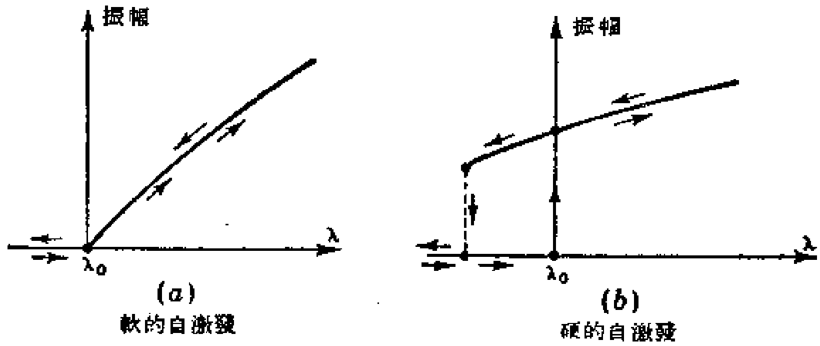



圖 11.3

如果這種自激振盪是軟的，發生的現象就像圖11.3(a)所畫的那樣；如果自激振盪是硬的，那就像圖11.3(b)所畫的那樣．對於第一種情形來說，如果 $\lambda$ 是逐漸增大的，那末，當 $\lambda$ 還沒有增大到臨界值 $\lambda_0$ 的時候，系統的平衡狀態並沒有任何變化．當 $\lambda$ 增加到 $\lambda_0$ 時，系統的平衡狀態就由穩定的變爲不穩定的，同時也就出现了一個穩定的極限環．而且這個極限環的振幅隨着 $\lambda$ 的增加而逐漸加大．如果，再讓 $\lambda$ 逐漸減小，那末，系統的平衡狀態的情況就沿着原來的變化路綫變化回來(圖11.3(a))，當 $\lambda$ 減小到 $\lambda_0$ 時，極限環就消失了．對於第二種情形來說，自激振盪是硬的，這時的情況就不同了(圖11.3(b))．在 $\lambda$ 逐漸增大的過程中，在 $\lambda = \lambda_0$ 時，突然就出現一個振幅是有限的極限環；$\lambda$ 繼續增大的時候，相應的極限環的振幅也隨之增大．如果 $\lambda$ 逐漸減小，那末，當 $\lambda$ 減小到 $\lambda_0$ 時，極限環(自激振盪)並不立刻消失，直到 $\lambda$ 再繼續減小到一定的數值時，極限環的振幅才由一個有限數值突然變爲零．所以，這種跳躍現象是和系統的運動狀態的滯後現象相聯系着的．

## 11.4 頻率縮減

如果作用在一個非綫性系統上周期性的輸入中包含兩個頻率 $\omega_1$ 和 $\omega_2$，那末，系統的輸出中不但包含有這兩個頻率以及相當於這兩個頻率的高次諧波，而且還有一個額外的頻率譜，借用聲學的術語，這個譜稱爲合成音，它是由頻率 $m\omega_1 \pm n\omega_2$ ($m, n$ 是整数)組成

1) N. Minorsky, "Introduction to Nonlinear Mechanics," Edwards Bros., Inc., Ann Arbor, Mich., 1947.

2) J. J. Stoker, "Nonlinear Vibrations," Interscience Publishers, Inc., New York, 1950 (俄文譯本[46]).

的．譬如說，把一個電壓 $x = x_0(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$ 加到一個非綫性導體上去，假設這個導體的電流 $y$ 與電壓 $x$ 之間的關係是 $y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$，那末，輸出 $y(t)$ 的頻率譜中就包含有下列各種頻率：$\omega_1$, $\omega_2$, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $3\omega_1$, $3\omega_2$, $\omega_1+\omega_2$, $\omega_1-\omega_2$, $2\omega_1+\omega_2$, $2\omega_1-\omega_2$, $\omega_1+2\omega_2$ 以及 $\omega_1-2\omega_2$．前六個頻率是普通的諧波，但是後六個頻率就是由於導體的非綫性性質所引起的合成音．這些合成音中，有一些比原來的 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 高，而另外一些就比 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 低．這些頻率比較低的諧波就稱爲次諧波．產生次諧波的過程就稱爲頻率縮減．

不難了解，如果 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 相當接近，那末 $\omega_1-\omega_2$ 就比原來的兩個頻率都小得很多．此外，如果對於這樣低的頻率，系統還能是穩定的，我們就可以得到頻率的數量級只是輸入頻率的 1/100，甚至於更低的次諧波．如果把若干個這樣的系統串聯起來，使一個系統的輸出是其次一個系統的輸入，我們還可以得到更低的頻率．

## 11.5 頻率侵佔現象

如果一個非綫性系統有一個自激振盪的頻率 $\omega_1$，那末，當系統的輸入的頻率 $\omega_2$ 與 $\omega_1$ 相差很小時，我們自然會想到輸出中不但同時有 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 兩種頻率，而且，由於非綫性的交互作用，輸出中還有拍頻率 $\omega_2-\omega_1$．但是，在實際情形中，現象是按照圖 11.4 的那種情形發生的：只要 $\omega_2$ 進入一定的同步區域 $AB$ 時，拍頻率就立刻消失．在這個區域內只有 $\omega_2$ 這一個頻率，所有發生的現象都好像是可變頻率 $\omega_2$ 把原有頻率 $\omega_1$ "侵佔"掉了一樣．

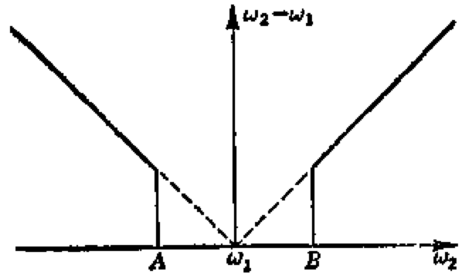


圖 11.4

萬・德爾・波爾(van der Pol)是最先解釋了這種頻率侵佔現象的人，後來，又有些其他的人發展了這方面的理論．

假定系統是二階的，它的微分方程是

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \alpha\frac{dy}{dt} + \gamma\left(\frac{dy}{dt}\right)^3 + \omega_1^2 y = B\omega_1^2\sin\omega_2 t, \tag{11.8}$$

這裏的 $\alpha$, $\gamma$ 和 $B$ 都是正常數．如果 $B=0$，那末，當振盪的振幅足够小的時候，系統的阻尼就是負的，當振幅足够大的時候，系統的阻尼就是正的，因此，就存在一個特別的振幅値，系統可以用這個振幅進行持續的自激振盪．不僅如此，如果 $\alpha$ 和 $\gamma$ 都相當小，那末，這個自激振盪的頻率就與 $\omega_1$ 相當接近．萬・德爾・波爾證明：當 $\omega_2$ 與 $\omega_1$ 相當接近時，方程(11.8)的解就可以寫成下列形式：

$$y(t) = b_1(t)\sin\omega_2 t + b_2(t)\cos\omega_2 t, \tag{11.9}$$

而且，$b_1(t)$ 和 $b_2(t)$ 都是變化得相當緩慢的時間函數，它們變化速度滿足下列條件：

$$\left|\frac{db_1}{dt}\right| \ll |\omega_2 b_1(t)|, \quad \left|\frac{db_2}{dt}\right| \ll |\omega_2 b_2(t)|.$$

把方程(11.9)代入方程(11.8)，並且只保留一階以下的項，我們就可以把 $b_1$ 和 $b_2$ 的微分方程組寫成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{db_1}{dt}&=f_1(b_1,\ b_2;\ \omega_2),\\ \frac{db_2}{dt}&=f_2(b_1,\ b_2;\ \omega_2).\end{aligned}\right\}\tag{11.10}$$

這是一個自持的一階微分方程組．所以，我們可以用等傾法來解，就像前一章在相平面上解二階綫性系統的作法一樣．分析的結果表明；如果 $\omega_2$ 在 $\omega_1$ 附近的一個一定範圍之內，方程組(11.10)在 $b_1b_2$ 平面上有一個穩定的結點．所以，不論 $b_1$ 和 $b_2$ 的初始值是多少，$b_1(t)$ 和 $b_2(t)$ 最後總要分別趨近於相當這一固定點的 $b_1$ 值和 $b_2$ 值．因此，根據方程(11.9)，就只有頻率是 $\omega_2$ 的振盪，根本不會再有頻率是 $\omega_2-\omega_1$ 的振盪．如果 $\omega_2$ 在那個範圍之外，那末，在 $b_1b_2$ 平面上就有一個穩定的極限環，因而也就可以說明圖 11.4 所表示的現象．

## 11.6　異步激發和異步抑制

在某些非綫性系統裏，一個頻率是 $\omega$ 的振盪可以被另一個頻率是 $\omega_1$ 的振盪激發起來或者抑制下去，而 $\omega_1$ 却根本不等於 $\omega$．在第一種情形中，那種現象就稱爲異步激發，而第二種情形中的現象就稱爲異步抑制．只要回想一下以下的事實就可以理解這些現象：即使在相空間中存在一個極限環，系統也不一定有持續的自激振盪．如果要發生持續的振盪，極限環就必須是穩定的，所謂"穩定"的意思，也就是說，當系統受到擾動或者從極限環移到相空間的其他一點以後，系統具有一個再回到極限環上去的傾向．不穩定的極限環在一個實際的物理系統中是不可能實現的．既然如此，我們就不難看出，在一定的情况下，一個新的振盪的發生．就可能給另一個振盪創造出穩定的條件，也可能破壞另一個振盪的穩定條件，第一種情形就是"異步激發"現象，第二種情形就是"異步抑制"現象．這裏，"異步"這樣一個形容詞只是用來强調 $\omega$ 與 $\omega_1$ 之間的關系是完全任意的而已．

## 11.7　參數激發和參數阻尼

很久以來人們就知道，如果一個振盪系統中有一個以頻率 $\omega$ 作周期變化的參數，系統就以頻率 $\omega/2$ 開始振盪．瑞雷爵士(Lord Rayleigh)曾經用以下的實驗來說明這種現象：把一根拉緊了的金屬綫的一端系在音叉的一股上，如果音叉以頻率 $\omega$ 進行振盪，那末，金屬綫就以頻率 $\omega/2$ 進行橫向振盪．我們再舉一個類似的例子：一個單擺(也就是懸掛在一根沒有重量的桿子的一個質量)在桿的上端受到一個正弦變化的外力(圖 11.5)．假設 $\theta$ 是單擺離開鉛直位置的微小角度位移，不損害普遍性，我們還可以假定正弦變化的外力的頻率是 1．這個外力也就可以寫作 $mg+a\cos t$，於是 $\theta$ 的微分方程就是[1)]

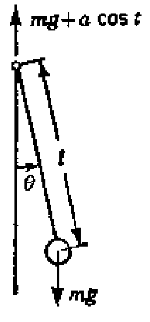



圖 11.5

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}+(mg+a\cos t)\theta=0,$$

其中 $m$ 是質量，$g$ 是重力加速度，$l$ 是擺的長度，$a$ 是周期外力的振幅．這個方程可以寫成

1) 關於單擺的運動可以參閱[50]．

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + (\alpha + \beta \cos t)\theta = 0, \tag{11.11}$$

所以，$\alpha$ 就等於 $g/l$，$\beta$ 等於 $a/ml$. 對於倒立擺（也就是質量在支承點上方的擺）的情形，$\theta$ 的方程也還是(11.11)，只不過把其中的 $g$ 換成 $-g$ 就是了. 所以，對於普通的擺，$\alpha$ 是正數；對於倒立擺，$\alpha$ 是負數. 方程(11.11)確實是一個綫性方程，只是加在擺上的外力作周期性的變化而已. 因此，我們就可以把這個系統看作是參數作周期性變化的系統.

方程(11.11)就是有名的馬丟(Mathieu)方程[51]. 解的穩定性是由 $\alpha$ 和 $\beta$ 這兩個常數來確定的. 具體地說，可以把 $\alpha\beta$ 平面分成一個穩定區域和一個不穩定區域，就像圖 11.6 所畫的那樣（這個圖中有陰影的就是穩定區域）. 可以從圖 11.6 看出，對於正的 $\alpha$，也就是普通的擺的情形來說，當周期外力不存在的時候，或者說 $\beta = 0$ 的時候，系統就是穩定的. 這當然是顯而易見的事實. 然而，有興趣的事實是：如果 $\beta$ 取某些適當的值，系統就成爲不穩定的了. 這時，擺的擺動的振幅就會越來越大，直到非綫性效應最後把振幅固定在一個相當大的常數上爲止. 這種現象就稱爲**參數激發**. 對於負的 $\alpha$，也就是倒立擺的情形來說，當支點上沒有周期外力的時候，系統自然是不穩定的；但是，當 $\beta$ 在一個一定的狹小範圍之內的時候，系統還可以是穩定的，只要 $\alpha$ 也取某些適當的數值就可以了. 這個現象就稱爲**參數阻尼**.

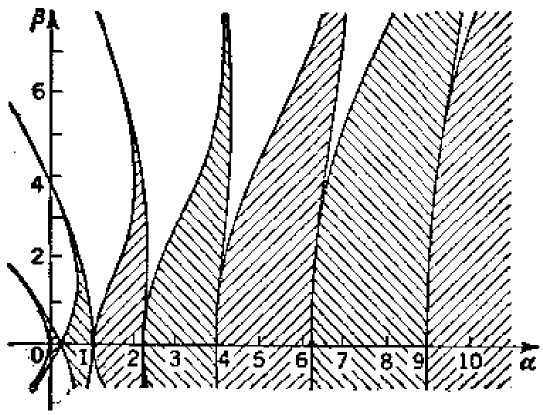



圖　11.6

任何一個系統，只要它有一個作周期變化的參數，在這個系統中就可能發生參數激發和參數阻尼的現象.

這種現象和以前介紹過的幾種非綫性現象，都可以在控制系統中加以利用，使控制系統得到所需要的性能. 事實上，的確也有不少種非綫性現象已經被應用到伺服控制系統的許多元件上去了. 但是，這些非綫性元件在目前還只是一些"新奇"的重要性不大的東西，而且，與其說它們是根據理論分析設計出來的，倒不如更恰當地說它們是依靠經驗和試驗"設計"出來的. 把特殊的非綫性現象應用到整個控制系統的系統設計上去的問題[1]，還是一個沒有被探討過的科學領域. 我們在以上幾節中的討論只不過是說明這種應用的廣泛的可能性而已.

1) 關於最優非綫性系統的綜合法可以參閱[48].

# 第十二章

# 變系數綫性系統

以前各章中，我們只比較詳細地討論過一個變系數系統（系數也是時間 $t$ 的函數的系統），這個系統就是：在支承端受到一個周期性外力的單擺．這個系統是在討論參數激發與參數阻尼時提到的（第十一章）．在所有其餘討論過的系統的微分方程中，系數全都不明顯地與時間變數 $t$ 有關．然而，我們曾經在第一章裏指出：系數隨時間變化的綫性系統的運動狀態可以和常系數綫性系統完全不同．在這一章裏，我們再回到這個問題上來，並且比較仔細地討論一個典型的但是很簡單的變系數系統——短射程的火箭彈．我們將要說明：這樣一些變系數系統的穩定性問題不能用處理常系數綫性系統的方式來解決．在這種情形中，不但拉氏變換和傳遞函數方法都不再能解决問題，而且，我們還不得不把處理問題的方式完全加以改變．

我們將要研究一個火箭彈在火箭推力起作用的過程中的運動狀態，假定這個火箭是依靠尾翼來穩定的．我們特别來考慮火箭軸綫與投射角之間的偏差角，這個偏差角是由於發射過程中的擾動以及飛行過程中尾翼所受到的阻力作用所引起的．關於火箭彈的動力學的一般問題，曾經在第二次世界大戰時期內被不同國家的許多學者仔細地研究過．羅色爾（J. B. Rosser），牛頓（R. R. Newton）和格羅司（G. L. Gross）曾經把美國學者的工作加以總結[1]．蘭金（R. A. Rankin）曾經報告了英國方面的工作[2]，卡里埃爾（P. Carrière）的論文代表了法國學者對於這個問題的研究工作[3]．我們在這裏的討論將是大爲化簡了的，討論的目的只是要提出變系數綫性系統的研究中的幾個有興趣的重要特點而已．

## 12.1 火箭彈在燃燒過程中的運動狀態

對於一個用尾翼穩定的火箭彈來說，鉛直面內的運動與水平面內的運動之間的相互影響可以忽略掉，也就是說，在鉛直面內由於水平面內的運動而產生的空氣動力是可以忽略的．所以，我們只考慮和研究鉛直面內的運動情况，也就能够知道火箭彈的特性了．因爲這是短射程的火箭彈，所以，我們把地面看成是一個平面．設 $v$ 是火箭彈的速度的絕對值，$\theta$ 是速度向量的傾角，$\phi$ 是火箭彈的軸綫的傾角（圖 12.1）．於是，火箭彈的冲角就是

$$\alpha = \phi - \theta. \tag{12.1}$$

設 $m$ 是火箭彈的質量，$g$ 是重力加速度．所以作用在火箭彈上的重力就是鉛直向下的力

1) J. B. Rosser, R. R. Newton and G. L. Gross, "Mathematical Theory of Rocket Flight," McGraw-Hill Company, Inc., New York, 1947.（俄文譯本[52]）.

2) R. A. Rankin, *Trans. Roy. Soc. London (A)*, **241**, 457—585 (1949).

3) P. Carrière, *Mém. artillerie franç.*, **25**, 253—360 (1951).

$mg$. 空氣動力是舉力 $L$, 阻力 $D$ 和轉矩 $M$, $L$ 和 $D$ 分別垂直於和平行於運動的方向. 這些力都是作用在火箭的重心上的. 火箭的推力 $S$ 是常數, 就像圖 12.1 所畫的那樣, $S$ 與軸綫之間有一個偏差角度 $\beta$, 對於重心來說, $S$ 的力矩臂是 $\delta$. 所以, 沿彈道方向的加速度的方程就是

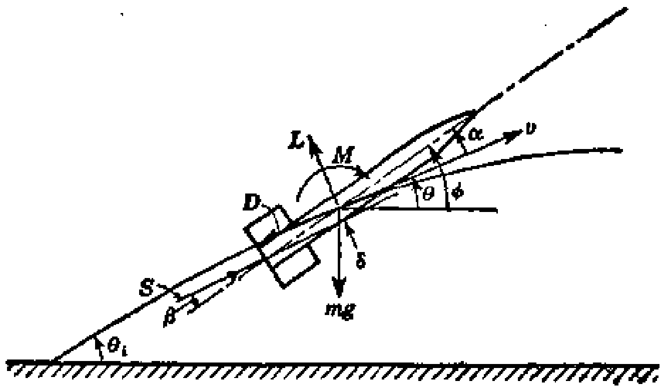



圖 12.1

$$m\frac{dv}{dt} = S\cos(\alpha - \beta) - mg\sin\theta - D. \tag{12.2}$$

垂直於彈道方向的加速度的方程就是

$$mv\frac{d\theta}{dt} = S\sin(\alpha - \beta) - mg\cos\theta + L. \tag{12.3}$$

最後,如果火箭對於通過重心的橫軸的迴轉半徑是 $k$, 那末,角加速度就是

$$mk^2\frac{d^2\phi}{dt^2} = S\delta - M. \tag{12.4}$$

在方程(12.4)中,我們已經把所謂的噴射阻尼轉矩忽略掉了[54], 因爲它比尾翼的恢復轉矩小。

空氣動力和空氣動力轉矩都與冲角 $\alpha$ 有關. 但是,如果火箭的尾翼安裝得不正,即使 $\alpha = 0$, 也還會有舉力和轉矩. 所謂安裝得不正,也就是說尾翼的安裝引起了一個角度誤差 $\gamma$, 以致於 $L$ 和 $M$ 在 $\alpha = \gamma$ 時消失, 而不在 $\alpha = 0$ 時消失. 如果 $\rho$ 是空氣的密度, $d$ 是火箭彈彈身的直徑, 我們就可以用下列公式引進舉力系數 $K_L$, 阻力系數 $K_D$ 和轉矩系數 $K_M$:

$$L = K_L\rho v^2 d^2 \sin(\alpha - \gamma), \tag{12.5}$$

$$D = K_D\rho v^2 d^2, \tag{12.6}$$

$$M = K_M\rho v^2 d^3 \sin(\alpha - \gamma). \tag{12.7}$$

對於短射程火箭彈來說,彈道的頂點並不高,所以,我們可以把密度 $\rho$ 看作是常數. 此外, 最大的速度值也不是很大, 以致於系數 $K_L$, $K_D$ 和 $K_M$ 都還可以看作是與飛行的馬赫(Mach)數(火箭彈的速度與音速的比值)無關的常數. 再者,對於短射程火箭來說,燃料的質量只佔火箭彈的總質量很小的一部分,所以,把火箭彈的質量看作是一個常數也不會

引起嚴重的誤差．考慮到這些簡化的假設，方程(12.1)到方程(12.7)就確定了火箭彈的彈道．

這種類型的火箭彈的燃燒時間都是很短的(譬如說，只有 0.2 秒)，所以就必須使加速度 $S/m$ 很大才行．事實上，推力 $S$ 是相當大的，和它比起來，重力和阻力都小到可以忽略掉的程度．而且，推力方向與飛行方向之間的偏差角度 $\alpha-\beta$ 總是很小的．所以，方程(12.2)的第零次近似就是

$$\frac{dv}{dt}=\frac{S}{m}. \tag{12.8}$$

因此，彈道的第零次近似就是一條傾角是初始傾角 $\theta_i$ 的直綫(圖 12.1)．沿着這條直綫的運動是一個等加速度 $S/m$ 的運動．如果 $z$ 是沿着這條直綫量度的距離，那末，這個運動也可以用下列方程表示：

$$v^2=\frac{2S}{m}z=\left(\frac{S}{m}\right)^2t^2. \tag{12.9}$$

如果發射火箭彈的初始速度是零，$z$ 就是到發射點的確實距離；如果有一個初始速度，$z$ 就是到發射點前面的某一點的距離，而不是到發射點的距離．從方程(12.9)我們得到

$$\frac{d}{dt}=\frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}=v\frac{d}{dz}=\sqrt{\frac{2S}{m}z}\;\frac{d}{dz}. \tag{12.10}$$

利用這個第零次的近似解，我們就可以計算火箭彈彈道的第一次近似解；下面我們就來作這件工作．

## 12.2 綫性化的彈道方程

因爲在燃燒過程中真正的彈道與它的第零次近似解之間的偏差總是很小的，所以，我們總是可以把方程(12.3)和(12.4)中的速度 $v$ 和時間導數用方程(12.9)和(12.10)來代替．此外，因爲 $\alpha-\beta$ 很小，$\sin(\alpha-\beta)$ 也就可以用 $\alpha-\beta$ 來代替．$\cos\theta$ 可以用 $\cos\theta_i$ 來代替．我們把舉力 $L$ 也忽略掉，因爲它比推力的橫向分量以及火箭的重量都小得多．採用這些簡化的假設，方程(12.3)和(12.4)就成爲

$$2z\frac{d\theta}{dz}=(\alpha-\beta)-\frac{mg}{S}\cos\theta_i \tag{12.11}$$

和

$$2z\frac{d^2\phi}{dz^2}+\frac{d\phi}{dz}=\frac{\delta}{k^2}-\frac{8\pi^2}{\sigma^2}z(\alpha-\gamma), \tag{12.12}$$

這裏的 $\sigma$ 的定義是

$$\sigma^2=4\pi^2\frac{k^2m}{K_M\rho d^3}, \tag{12.13}$$

很明顯，$\sigma$ 的量綱是長度．我們可以把 $\sigma$ 取作火箭的擾動運動(對於第零次近似而言)的特徵長度，並且也可以看作是擾動的彈道的"波長"．方程(12.1)，(12.11)和(12.12)就是三個未知函數 $\alpha$, $\theta$ 和 $\phi$ 的綫性化的方程．方程的綫性化是在這樣一個假設之下作的：對於一個理想的發射角 $\theta_i$ 來說，彈道與直綫之間的差別很小．

我們可以把 $\theta$ 和 $\phi$ 消去而得出 $\alpha$ 的單獨一個方程．作法是這樣的：先用 $2\sqrt{z}$ 除方程(12.11)，再把結果對 $z$ 微分．這樣就得到

$$\sqrt{z}\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{1}{2\sqrt{z}}\frac{d\theta}{dz}=\frac{1}{2\sqrt{z}}\frac{d\alpha}{dz}-\frac{1}{4z\sqrt{z}}\left(\alpha-\beta-\frac{gm}{S}\cos\theta_i\right).$$

現在，我們再用 $2\sqrt{z}$ 除方程(12.12)，然後，從結果中減去上面的方程，最後，再利用方程(12.1)的關係．就得出

$$\sqrt{z}\frac{d^2\alpha}{dz^2}+\frac{1}{\sqrt{z}}\frac{d\alpha}{dz}+\left(\frac{4\pi^2\sqrt{z}}{\sigma^2}-\frac{1}{4z\sqrt{z}}\right)\alpha=\frac{\delta}{2k^2\sqrt{z}}$$
$$+\frac{4\pi^2\sqrt{z}}{\sigma^2}\gamma-\frac{1}{4z\sqrt{z}}\left(\beta+\frac{gm}{S}\cos\theta_i\right).$$

這個方程明白地表示出下列事實：用來研究火箭彈的微分方程不是常系數方程．其實，只要按照下列公式引進一個無量綱距離 $\xi$，

$$\xi=\frac{2\pi z}{\sigma} \tag{12.14}$$

[$\sigma$ 就是方程(12.13)所規定的"波長"]，我們就可以把 $\alpha$ 的方程化為貝塞爾(Bessel)方程的標準形狀，也就是

$$\frac{d^2\alpha}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\alpha}{d\xi}+\left[1-\frac{(1/2)^2}{\xi^2}\right]\alpha=\gamma+\left(\frac{\delta\sigma}{4\pi k^2}\right)\frac{1}{\xi}$$
$$-\frac{1}{4}\left(\beta+\frac{gm}{S}\cos\theta_i\right]\frac{1}{\xi^2}. \tag{12.15}$$

把 $\alpha$ 確定出以後，再積分下列方程也就可以把 $\theta$ 計算出來：

$$\frac{d\theta}{d\xi}=\frac{1}{2\xi}\left[\alpha-\beta-\frac{mg}{S}\cos\theta_i\right]. \tag{12.16}$$

這個方程是由方程(12.11)變化出來的．

這些微分方程中的自變數 $z$ 或 $\xi$ 並不是時間變數而是距離變數．但是，正如方程(12.9)所表示的那樣，$z$ 是時間 $t$ 的單調增函數，$\xi$ 當然也就是 $t$ 的增函數．因此，把自變數從 $t$ 改為 $\xi$ 並不會改變系統方程的穩定性；也就是說，如果系統對於 $\xi$ 來說是穩定的，那末，系統對於 $t$ 來說也還是穩定的．在這裏，"穩定"的意思就是，當 $t$ 或 $\xi$ 增加時，彈道與理想的直綫彈道之間的偏差會逐漸地減小．因此，穩定性問題完全可以用自變數 $\xi$ 來討論．當時間 $t$ 增加時，$\xi$ 就從 $t=0$ 時的初始值 $\xi_0$ 增大起來．如果，火箭彈的初始發射速度是零，初始值 $\xi_0$ 也就是零．

## 12.3 火箭彈的穩定性

為了討論穩定性問題，我們必須根據特定的初始條件去解方程(12.15)和方程(12.16)，然後，再確定，當 $\xi$ 增加的時候，冲角 $\alpha$ 是否趨於零，或者更恰當些，考慮彈道的傾角的偏差 $\theta-\theta_i$ 是否趨於零．方程(12.15)確實是一個 $\frac{1}{2}$ 階的貝塞爾方程，所以，補充函數就是 $\frac{1}{2}$ 階的和 $-\frac{1}{2}$ 階的貝塞爾函數．但是，這些補充函數都是可以用初等函數表示的．事實

上,方程(12.15)可以改寫爲

$$\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}+\zeta=Q(\xi),\tag{12.17}$$

其中

$$\zeta=\sqrt{\xi}\,\alpha,\tag{12.18}$$

而

$$Q(\xi)=\gamma\sqrt{\xi}+\left(\frac{\delta\sigma}{4\pi k^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\xi}}-\frac{1}{4}\left(\beta+\frac{gm}{S}\cos\theta_i\right)\frac{1}{\xi^{3/2}}.\tag{12.19}$$

因此,對於新未知函數 $\zeta$ 來說,補充函數就是 $\sin\xi$ 和 $\cos\xi$。

火箭彈離開發射器時的條件,或者初始條件就是

$$\left.\begin{aligned}v&=v_0,\\ \theta&=\theta_0,\\ \alpha&=\alpha_0,\\ d\phi/dt&=(d\phi/dt)_0.\end{aligned}\right\}\tag{12.20}$$

這裏的下標"$_0$"表示 $t=0$ 時刻的值. $\xi$ 和 $\zeta$ 的初始值當然就是

$$\xi_0=\frac{2\pi}{\sigma}\frac{m}{2S}v_0^2=\frac{\pi m v_0^2}{\sigma S}\tag{12.21}$$

和

$$\zeta_0=\sqrt{\xi_0}\,\alpha_0.\tag{12.22}$$

根據方程(12.16),$t=0$ 時就有

$$\sqrt{\xi_0}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_0=\frac{\alpha_0-\beta-(mg/S)\cos\theta_i}{2\sqrt{\xi_0}}.$$

但是 $\theta=\phi-\alpha$,所以

$$\sqrt{\xi_0}\left(\frac{d\alpha}{d\xi}\right)_0+\frac{1}{2\sqrt{\xi_0}}\alpha_0=\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_0=\sqrt{\xi_0}\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_0+\frac{\beta+(gm/S)\cos\theta_i}{2\sqrt{\xi_0}}$$

或更明顯地,

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_0=\sqrt{\xi_0}\frac{\sigma(d\phi/dt)_0}{2\pi v_0}+\frac{\beta+(gm/S)\cos\theta_i}{2\sqrt{\xi_0}}.\tag{12.23}$$

把初始條件這樣變化以後,我們就可以把方程(12.17)的解 $\zeta$ 或 $\alpha$ 直接寫出來:

$$\begin{aligned}\alpha(\xi,\xi_0)=&\frac{1}{\sqrt{\xi}}\cos(\xi-\xi_0)\left[\zeta_0-\int_{\xi_0}^{\xi}\sin(\eta-\xi_0)Q(\eta)d\eta\right]\\&+\frac{1}{\sqrt{\xi}}\sin(\xi-\xi_0)\left[\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_0+\int_{\xi_0}^{\xi}\cos(\eta-\xi_0)Q(\eta)d\eta\right],\end{aligned}\tag{12.24}$$

這裏的 $Q$ 就是方程(12.19)所表示的驅動函數. 因爲 $Q(\eta)$ 中包含有 $\eta$ 的半次方冪,所以方程(12.24)中的積分確實都是福來內爾(Fresnel)積分. 把 $\alpha$ 計算出來以後,用積分方法就可以由方程(12.16)求出 $\theta$ 來:

$$\theta-\theta_i=(\theta_0-\theta_i)-\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{mg}{S}\cos\theta_i\right)\log\frac{\xi}{\xi_0}+\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{\alpha(\eta,\xi_0)}{\eta}d\eta.\tag{12.25}$$

我們再來把發射器上的各種擾動的作用分離開來考慮：把方程(12.25)寫成若干項，每一項都代表一種類型的擾動．寫法是這樣的：

$$\theta-\theta_i=(\theta_0-\theta_i)+\left(\beta+\frac{mg}{S}\cos\theta_i\right)G_1(\xi,\xi_0)+\frac{\delta\sigma}{2\pi k^2}G_2(\xi,\xi_0)$$

$$-\gamma[G_1(\xi,\xi_0)+G_3(\xi,\xi_0)]+\alpha_0G_3(\xi,\xi_0)+\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\pi v_0}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_0G_4(\xi,\xi_0). \quad (12.26)$$

第一項表示彈道傾角的初始偏差的影響．第二項表示推力不正和重力的影響．第三項表示推力的轉矩的影響．第四項表示尾翼的安裝不正所引起的影響．第五項表示初始冲角的影響．最末一項表示火箭彈的初始角速度的影響．每一個 $G$ 都是 $\xi$ 和 $\xi_0$ 這兩個變數的函數，並且也是由一些福來內爾積分組成的．羅色爾和他的合作者把這些函數稱爲火箭函數，並且在他們的書裏還把這些函數作成函數表．用圖綫表示這些函數的幾個圖(圖 12.2 到 12.5)，也是從他們的書裏採用的．

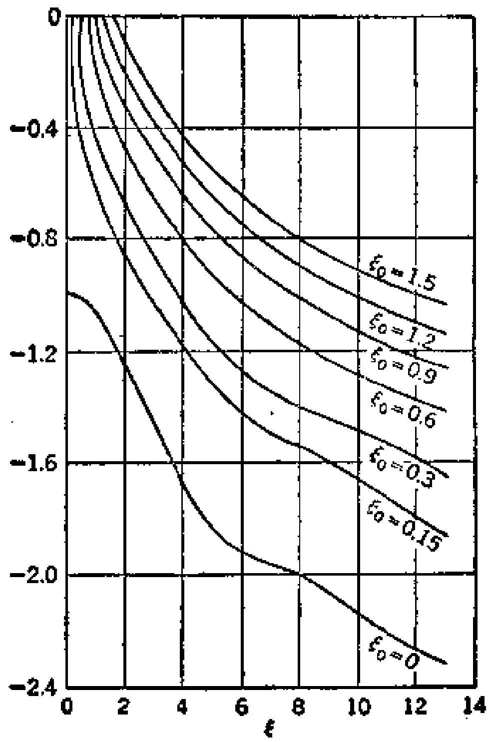



圖 12.2

把圖 12.2 到圖 12.5 這幾個圖觀察一下，就可以看出這樣一個事實：對於很大的 $\xi$ 值來說，所有這些火箭函數 $G$ 幾乎都是常數．所以，各種擾動都不能阻尼掉．方程(12.26)的第一項和最後兩項表示在發射點所受的初始擾動的影響，然而，當 $\xi$ 很大時，它們還保持不等於零的有限值．方程(12.26)的其餘三項都是由於"輸入"(或者說驅動函數)而產生的"輸出"．對於很大的 $\xi$ 值來說，它們的值也不是零．$G_1$ 函數的性質尤其惡劣：當 $\xi$ 很大的時候，它差不多等於 $\log\xi$，所以也就要無限地增大．因此，如果我們用以前提出的系統穩定性的判斷準則(也就是說，初始擾動應該趨於消失，而且對於"合理"的輸入，輸出總應該是有限的)來衡量火箭彈的運動，那末，火箭彈就是不穩定的． 從另一方面來看，基本方程(12.15)的補充函數都是貝塞爾函數，當自變數無限增大的時候，這些函數是趨於零的，這個事實却很容易使人錯誤地認爲系統是穩定的．如果我們不加思索地搬用關於常系數綫性系統的經驗，那末，變系數系統的運動狀態就很難使人理解了．然而，以上的討論只不過是說明一件消極的事實：研究常系數綫性系統時所能應用的一些概念，對於系數隨時間變化的系統是不能應用的． 從積極方面來考慮，我們就需要有一種新方法來處理變系數系統的穩定性問題和控制問題． 關於這一點，我們就在下一節裏加以討論．

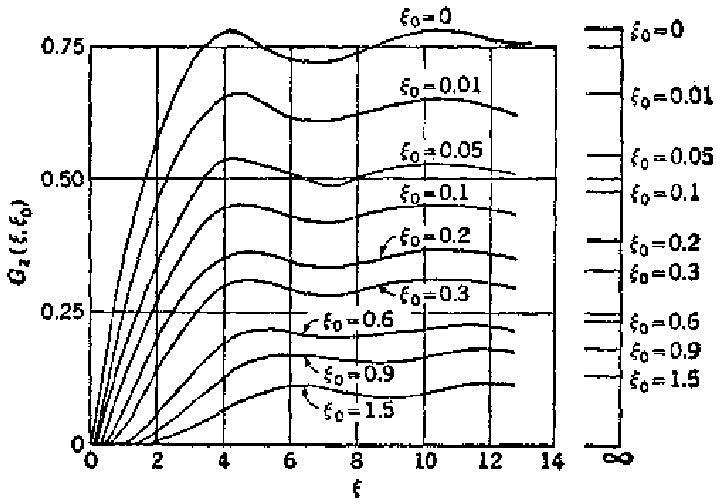



圖 12.3

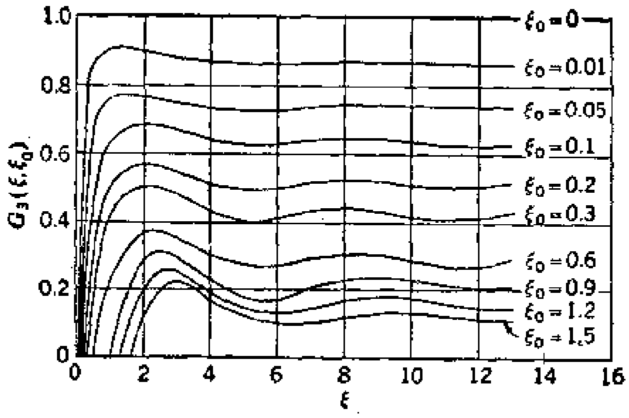



圖 12.4

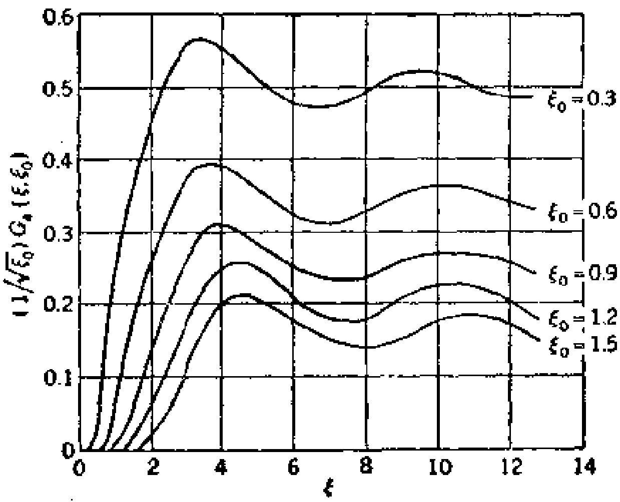



圖 12.5

## 12.4 變系數系統的穩定性問題和控制問題

對於常系數綫性系統的情形,我們以前所作的討論表明:只要沒有驅動函數(輸入)的齊次方程的解都衰減得足够快,就能保證系統在穩定性以及其他控制性能方面都相當良好. 因此,雖然系統的驅動函數(或輸入)可能從一種情形變到另一種很不相同的情形,可是,性能的判斷準則以及以此爲根據的設計問題都只是以對齊次方程的解(整個的運動方程的補充函數)的研究爲基礎的,這就是普通的伺服系統理論的基本原理, 至於根據拉氏變換建立傳遞函數,再用傳遞函數進行分析的方法只是一個很有用的技巧而已; 譬如說,只從原則上來看,求補充函數的古典方法也並不次於艾文思的根軌跡法.

我們在這一章前三節中的討論明確地說明這樣一個事實: 如果一個綫性系統的有隨時間變化的系數(參數),那末,即使微分方程的所有補充函數都是衰減的, 我們也不能保證有驅動函數作用時這個系統還有良好的運轉狀態. 儘管補充函數都衰減,但是,只要有某種輸入(驅動函數)的作用,輸出趨於無限大都是可能的. 因此,如果不知道系統的輸入函數(驅動函數),我們就無法回答運轉狀態是否良好的問題. 既然有這樣一個必須先肯定輸入函數的要求,而且,具體地解非齊次變系數微分方程也是十分困難的,所以,爲變系數系統的穩定性和控制性能建立一個普遍理論的任務好像是毫無希望的. 但是, 我們必須把計算上的困難和建立一個普遍理論的實質的困難區別開來. 事實上, 只要有快速的計算機,計算的困難就可以被克服,所以,這並不能認爲是眞正的困難. 如果,這種條件已經實現了,我們就會知道,爲分析系統的運動狀態而具體給出輸入函數的工作實質上就是爲一個特定的目的進行設計的問題:在設計系統以前,我們必須知道在怎樣的情况之下對於系統的要求是怎樣的. 如果我們採用這種解决辦法, 也就不需要提出一般性的穩定問題了;因爲,我們的設計工作已經使系統具有特定的令人滿意的性能, 這已經完全解决了實際問題,如果,再去一般地討論穩定性問題就是多餘的了. 根據這個解决問題原則,我們就可以提出一個關於變系數綫性系統的控制設計的一般理論. 這個理論是古典的彈道擾動理論的一個應用. 下一章我們就要討論這個理論. 把以前的討論整個回顧一下, 我們可以這樣說:普通的伺服系統理論是關於一類特殊類型的系統的設計的一般理論;下一章的擾動理論却是關於一類更一般的類型的系統的設計的特殊理論.

# 第十三章

# 利用攝動理論的控制設計

彈道攝動理論的目的就是計算投射物(例如砲彈，火箭彈等)在所謂正規彈道附近的運動狀態．正規彈道是一條有着特定的初始條件、推進程序、大氣條件以及規定好的舉力與阻力的確定的彈道．如果實在的情況與這些特定的條件有一點微小的差別，或者投射物在飛行過程受到出乎意料的風的擾動而稍微離開了正規彈道，那末，投射物的實際的彈道就不同於正規彈道了．但是，如果這樣一些擾動作用都很小，那末，擾動過的彈道(實際彈道)還是在正規彈道的附近，而且，擾動過的彈道與正規彈道之間的差別也是很小的．因爲正規彈道是一條已經計算好的已知的彈道，所以，實際彈道與正規彈道相當接近這一事實就是把實際軌道的微分方程綫性化的根據．經過綫性化的手續以後，擾動過的系統的運動方程就是系數隨時間變化的綫性方程，系數隨時間變化是由於投射物所處的條件隨時間變化的緣故．

彈道攝動理論的本來目的只是計算投射物的彈道對於正規彈道的微小改正量(這種改正是由於投射物的重量與標準值之間的誤差，大氣情況的改變，風的擾動作用等等因素引起的)，但是，因爲有了現代的大型快速計算機，目前的趨勢是直接去分別地計算每一條擾動過的彈道，所以彈道攝動理論在彈道計算問題上的用處也就隨之消失了．然而，變系數綫性系統的控制設計問題却剛好是可能利用彈道攝動理論的原則的問題．在這一章裏，我們將要通過一個具體問題的討論來說明這種作法．我們要討論的具體問題就是長距離火箭(例如遠射程導彈)的控制問題．德瑞尼克(R. Drenick)曾經研究過這個問題[1]，但是，我們的討論將是更完善的，並且還要談到這樣一類飛行器的自動導航的問題[2]．

### 13.1 火箭的運動方程

爲了使討論不過分複雜，我們假設火箭在旋轉着的地球的赤道平面內運動，就像圖13.1所畫的那樣．在赤道平面內的運動因爲不會受到柯瑞奥利(Coriolis)力的作用，所以就可以保持平面運動．我們所選取的坐標系統對於旋轉的地球來說是固定的，也就是說，坐標系統也是以地球自轉的角速度 $\Omega$ 轉動着的．在任何一個時刻 $t$，火箭在赤道平面內的位置總可以用 $r$ 和 $\theta$ 兩個數來確定的．這裏，$r$ 是半徑(或高度)，也就是從火箭到地心的距離，$\theta$ 是到發射點的角度，也就是火箭所在的位置與發射點之間的經度差．設 $r_0$ 是地球的半徑．$g$ 是地面上的單純的重力加速度，其中不包含地球自轉的離心力的因素．設 $R$ 和 $\Theta$ 分別是火箭的每單位質量平均受到的推力與空氣動力的徑向(半徑方向)分量和橫

1) 參閱 R. Drenick, *J. Franklin Inst.*, **25**, 423—436 (1951) 或 [55].

2) 參閱下列論文: H. S. Tsien (錢學森), T. C. Adamson, E. L. Knuth, *J. Am. Rocket Soc.*, **22**, 192—199 (1952).

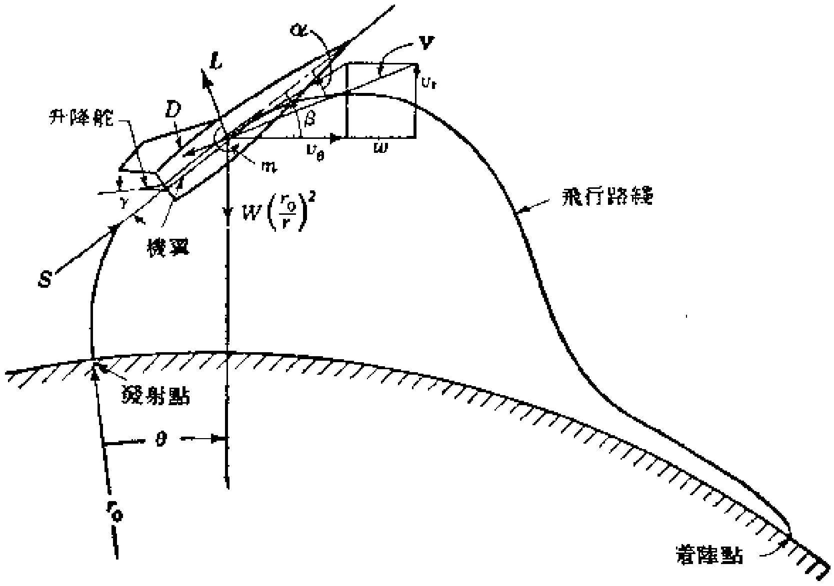



圖 13.1

向(垂直於半徑的方向)分量. 於是,火箭的重心的運動方程就是:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \dot{r}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \dot{\theta}, \\ \frac{d\dot{r}}{dt} &= R + r(\dot{\theta} \pm \Omega)^2 - g\left(\frac{r_0}{r}\right)^2, \\ r\frac{d\dot{\theta}}{dt} &= \Theta - 2\dot{r}(\dot{\theta} \pm \Omega), \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

如果火箭從西向東飛行,方程(13.1)的右端的第二項中就必須取+號,如果,火箭從東向西飛行,就取一號。

$R$ 和 $\Theta$ 這兩個力都是由推力 $S$、舉力 $L$ 和阻力 $D$ 組成的. 設 $W$ 是火箭對於 $g$ 而言的瞬時重量(也就是火箭的瞬時質量與 $g$ 的乘積); $V$ 是空氣對於火箭的相對速度的大小. 這樣,我們引進下列公式定義的三個參數 $\Sigma$, $\Lambda$, 和 $\Delta$ 就可以使討論更方便些:

$$\Sigma = \frac{Sg}{W},\ \Lambda = \frac{Lg}{WV},\ \Delta = \frac{Dg}{WV}. \tag{13.2}$$

假設實際的風速 $w$ 是水平方向的,而且也在赤道平面之內,如果對於火箭而言這個風是迎頭吹來的,$w$ 就取正號;反之,如果風向和火箭的飛行方向相同,$w$ 就取負號. 我們把 $w$ 看作只是高度 $r$ 的函數. 如果 $v_r$ 是徑向速度,$v_\theta$ 是橫向速度,也就是說

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \dot{r}, \\ v_\theta &= r\dot{\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{13.3}$$

相對的空氣速度 $V$ 就可以這樣計算:

$$V^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta} + w)^2. \tag{13.4}$$

如果 $\beta$ 是推力方向與水平方向之間的角度,那末,單位質量上所受的推力和空氣動力的徑向分量 $R$ 和橫向分量 $\Theta$ 就是:

$$\left.\begin{aligned} R &= \Sigma\sin\beta + (v_\theta + w)\Lambda - v_r\Delta, \\ \Theta &= \Sigma\cos\beta - v_r\Lambda - (v_\theta + w)\Delta. \end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

如果 $N$ 是對於重心的力矩被火箭對於重心的轉動慣量除得的商數,那末,角加速度的方程就是

$$\frac{d\dot{\beta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} + N. \tag{13.6}$$

為了完全確定火箭的運動狀態,必須用時間函數的形式把舉力 $L$、阻力 $D$ 和對於重心的力矩 $m$ 給出來. 按照空氣動力學的習慣,我們用舉力系數 $C_L$ 和阻力系數 $C_D$ 來表示 $L$ 和 $D$:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\rho V^2 A C_L, \\ D &= \frac{1}{2}\rho V^2 A C_D, \end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

其中,$\rho$ 是空氣的密度,是高度 $r$ 的函數. $A$ 是一個固定的特徵面積,譬如說,可以設火箭的尾翼面積是 $A$. 在我們所考慮的這個問題裏,既然火箭只在赤道平面內運動,從空氣動力學計算的角度來看,火箭的運動狀態是由冲角 $\alpha$ 決定的(冲角就是推力的作用綫與空氣的相對速度向量之間的角度)(圖 13.1)然而,對於火箭的運動的控制是通過升降舵角 $\gamma$ 的控制來執行的. 所以,能够影響 $C_L$ 和 $C_D$ 的參數就是 $\alpha$ 和 $\gamma$. 此外,這些空氣動力學的系數還是雷諾(Reynold)數 Re 和馬赫(Mach)數 $M$ 的函數. 如果 $a$ 是空氣的音速,馬赫數就是

$$M = \frac{V}{a}, \tag{13.8}$$

設 $a$ 也是高度 $r$ 的函數. 如果 $l$ 是火箭的一個特徵長度,$\mu$ 是空氣的粘性系數,雷諾數就是

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V l}{\mu}. \tag{13.9}$$

粘性系數 $\mu$ 也是高度 $r$ 的函數. 這樣,我們就有

$$\left.\begin{aligned} C_L &= C_L(\alpha, \gamma, M, \mathrm{Re}), \\ C_D &= C_D(\alpha, \gamma, M, \mathrm{Re}). \end{aligned}\right\} \tag{13.10}$$

我們再假定,推力作用綫通過火箭的重心;因此,推力就不產生力矩. 不難想到在火箭發動機工作的飛行過程中,火箭的角度運動(轉動)一定很慢,所以噴射阻尼力矩是可以忽略不計的. 因此,空氣動力力矩 $m$ 是作用在火箭上的唯一的力矩,$m$ 也可以按照下列公式用系數 $C_M$ 表示:

$$m = \frac{1}{2}\rho V^2 A l C_M. \tag{13.11}$$

力矩系數 $C_M$ 也是四個變數 $\alpha$, $\gamma$, $M$ 和 Re 的函數,

$$C_M = C_M(\alpha, \gamma, M, \mathrm{Re}). \tag{13.12}$$

如果 $I$ 是火箭對於重心的瞬時的橫向轉動慣量,方程(13.6)裏的 $N$ 就是

$$N = \frac{m}{I}. \tag{13.13}$$

利用上面規定的許多符號,運動的微分方程組就成爲下面的形狀:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= v_r,\\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{v_\theta}{r},\\
\frac{d\beta}{dt} &= \dot\beta,\\
\frac{dv_r}{dt} &= \Sigma\sin\beta + (v_\theta + w)\Lambda - v_r\Delta + r\left(\frac{v_\theta}{r} \pm \Omega\right)^2 - g\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = F,\\
\frac{dv_\theta}{dt} &= \Sigma\cos\beta - v_r\Lambda - (v_\theta + w)\Delta - 2v_r\left(\frac{v_\theta}{r} \pm \Omega\right) + \frac{v_\theta v_r}{r} = G,\\
\frac{d\dot\beta}{dt} &= \frac{1}{r}\left\{\Sigma\cos\beta - v_r\Lambda - (v_\theta + w)\,\Delta - 2v_r\left(\frac{v_\theta}{r} \pm \Omega\right) + N = H.\right.
\end{aligned}\right\} \tag{13.14}$$

這個方程組是六個未知函數 $r$, $\theta$, $\beta$, $v_r$, $v_\theta$ 和 $\dot\beta$ 的一階方程組. 如果要解這個方程組,就必先知道開始時($t = 0$)這些未知函數的初始值;而且,推力 $S$, 重量 $W$ 和轉動慣量 $I$ 在每一時刻 $t$ 的瞬時值也必須事先給定. 如果要確定各個空氣動力, 升降舵角 $\gamma$ 的運動也要用一個時間函數 $\gamma(t)$ 事先給定. 空氣的情况也必須知道,也就是說,風速 $w$,密度 $\rho$,空氣的粘性系數 $\mu$ 以及音速 $a$ 都必須是高度 $r$ 的已知的函數. 冲角 $\alpha$ 是不能知道的,因爲它必須根據角度 $\beta$ 和相對的空氣速度向量 $V$ 來計算.

假定空氣的情况已經被標準化了(譬如說,我們可以用一個統計的平均情况作爲這個標準情况),而且, 我們把火箭的平均特性和火箭發動機的平均性能取作火箭及其發動機的代表. 利用這些具體的數據,只要給定了升降舵角度 $\gamma$ 的運動規律 $\gamma = \gamma(t)$, 我們就可以把方程組(13.14)積分, 從而把火箭的飛行路綫(彈道)計算出來. 實際的計算工作完全可能用計算機來作. 這樣計算出來的飛行路綫, 是一個標準的火箭在標準的空氣狀態的飛行路綫,這也就是**正規飛行路綫**或**正規彈道**.

正規飛行路綫的最重要的特性就是它的**射程**. 所謂射程就是發射點和着陸點之間的距離. 所謂火箭的**航行問題**就是要算出火箭發動機的合適的**關車時間**並且找出飛行過程中升降舵角度的合適的運動規律,使得射程正好是我們所需要的數值. 對於標準火箭在標準大氣中的航行問題,可以在火箭發射之前用數學方法完全解決,因爲計算這條正規飛行路綫所需要的全部資料都是已知的或者是預先給定了的.

## 13.2 攝動方程

實際的大氣的特性並不一定與所說的標準大氣狀態相符合. 每一個高度上的風速都隨氣候條件變化;溫度 $T$ 也是隨時間變化的. 因此,我們可以想到,由於大氣條件的不同,

實際的飛行路綫與正規飛行路綫一定也有些差別。實際的火箭在重量以及發動機性能等等方面與理想的標準火箭也總會有些差別，因此，如果升降舵角度 $\gamma$ 仍然採用原來給定的動作程序，那末，實際的飛行路綫就會與正規路綫不同。所以，實際的火箭的航行問題就是要適當地隨時改正升降舵角度的動作程序，設法使實際的射程與正規飛行路綫的射程相同，而且也還能準確無誤地在標準着陸點着陸。因為火箭的速度非常高，這樣一個航行問題就不能用普通的方法來解決，理由是這樣的：在普通的航行問題（譬如汽車或輪船的駕駛問題）中，因為速度相當低，慣性作用相當小，所以只要隨時根據位置的偏差改正運動路綫就可以使總的運動路綫符合要求，完全不需要考慮慣性的影響。但是，對於像火箭這樣的高速度飛行器的情形來說，就不能只根據運動學的考慮來進行操縱，因為慣性作用相當大，所以，必須考慮系統的動力學的效應才能使路綫符合要求。對於這種情形，航行問題就必須依靠高速的自動計算系統來解決，對於每一個離開正規情況的偏差，這個計算系統都能在一段幾乎等於零的時間內發生反應，同時發出改正運動狀態的信號。所以，應該把這種問題更恰當地稱為導航問題，把這種控制系統稱為導航系統。

一般性的導航問題實在是非常困難的。但是，我們可以相信離開正規狀態的偏差總是很小的，因為，正規飛行路綫畢竟是一條最有代表性的平均的路綫。這個事實使我們立刻想到，只要考慮偏差的一階量就完全够了。這個"綫性化"的作法就是彈道擾動理論的基礎。經過綫性化以後，新的方程組（當然是綫性方程組）的系數都只是根據正規飛行路綫的情況計算出來的，一般說來，這些系數都是隨時間變化的。我們關於長距離火箭的導航問題所作的討論也就是這一類系統的控制設計的一個例子。這個例子的特定的設計要求，就是設法消滅射程的誤差。這裏，被控制的"輸入"就是升降舵角度的改正動作。以下的討論中我們就通過具體的情况來說明這些概念。

以下我們用符號上的橫綫"¯"表示正規飛行路綫的各個數量，用 $\delta$ 符號表示相當於各個數量的偏差。所以實際的飛行路綫的各個數量就是

$$\left.\begin{aligned} r &= \bar{r} + \delta r, \quad \theta = \bar{\theta} + \delta\theta, \quad \beta = \bar{\beta} + \delta\beta, \\ v_r &= \bar{v}_r + \delta v_r, \quad v_\theta = \bar{v}_\theta + \delta v_\theta, \quad \dot{\beta} = \dot{\bar{\beta}} + \delta\dot{\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{13.15}$$

實際的大氣情况與標準大氣情况之間的偏差是用密度偏差 $\delta\rho$，溫度偏差 $\delta T$ 和風速偏差 $\delta w$ 來表示的，所以

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho, \quad T = \bar{T} + \delta T, \quad w = \bar{w} + \delta w. \tag{13.16}$$

如果我們假設在任何一個高度上空氣的化學成分都與標準大氣在這個高度上的成分相同，那末，只要知道 $\delta\rho$ 和 $\delta T$ 也就可以計算出壓力偏差（如果事實需要這樣作的話）。假設實際的火箭與標準火箭之間只有重量偏差 $\delta W$ 和轉動慣量偏差 $\delta I$，也就是說

$$W = \bar{W} + \delta W, \quad I = \bar{I} + \delta I. \tag{13.17}$$

還假設推力 $S$ 與標準值完全相同。此外，火箭的尾翼面積 $A$ 以及方程(13.10)和(13.12)所表示的空氣動力特性也都假定是不變的。

把方程(13.15)，(13.16)和(13.17)代入方程(13.14)，然後，再從每一個方程裏減去相應的正規飛行路綫的方程，根據綫性化的原則只保留各個偏差的一階量。我們就得下列

方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\delta r}{dt}=\delta v_r,\\&\frac{d\delta\theta}{dt}=-\frac{\bar v_\theta}{\bar r^2}\delta r+\frac{1}{\bar r}\delta v_\theta,\\&\frac{d\delta\beta}{dt}=\delta\dot\beta,\end{aligned}\right\}\tag{13.18}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\delta v_r}{dt}&=a_1\delta r+a_2\delta\beta+a_3\delta v_r+a_4\delta v_\theta+a_5\delta\gamma+a_6\delta\rho\\&\quad+a_7\delta T+a_8\delta w+a_9\delta W,\\\frac{d\delta v_\theta}{dt}&=b_1\delta r+b_2\delta\beta+b_3\delta v_r+b_4\delta v_\theta+b_5\delta\gamma+b_6\delta\rho\\&\quad+b_7\delta T+b_8\delta w+b_9\delta W,\\\frac{d\delta\dot\beta}{dt}&=c_1\delta r+c_2\delta\beta+c_3\delta v_r+c_4\delta v_\theta+c_5\delta\gamma+c_6\delta\rho\\&\quad+c_7\delta T+c_8\delta w+c_9\delta W+c_{10}\delta I.\end{aligned}\right\}\tag{13.19}$$

方程中的這些系數 $a$, $b$, $c$ 都是方程(13.14)所定義的函數 $F$, $G$, $H$ 在正規飛行路綫上計算的偏導數．舉例來說：

$$\left.\begin{aligned}&a_1=\left(\overline{\frac{\partial F}{\partial r}}\right),\quad a_2=\left(\overline{\frac{\partial F}{\partial\beta}}\right),\quad a_3=\left(\overline{\frac{\partial F}{\partial v_r}}\right),\\&a_4=\left(\overline{\frac{\partial F}{\partial v_\theta}}\right),\quad a_5=\left(\overline{\frac{\partial F}{\partial\gamma}}\right),\quad a_6=\left(\overline{\frac{\partial F}{\partial\rho}}\right),\\&a_7=\left(\overline{\frac{\partial F}{\partial T}}\right),\quad a_8=\left(\overline{\frac{\partial F}{\partial w}}\right),\quad a_9=\left(\overline{\frac{\partial F}{\partial W}}\right).\end{aligned}\right\}\tag{13.20}$$

類似地各個系數 $b$ 就是 $G$ 的各個偏導數，各個 $c$ 就是 $H$ 的各個偏導數． 這些系數的詳細計算都在本章的附錄中陳述．

方程(13.18)和(13.19)合併起來就是六個偏差量的變系數綫性方程組．如果大氣性質的偏差 $\delta\rho$, $\delta T$ 和 $\delta w$ 都是已知的，而且 $\delta\gamma$, $\delta W$ 和 $\delta I$ 都是給定的，那末，這個方程組就能確定 $\delta r$, $\delta\theta$, $\delta\beta$, $\delta v_r$, $\delta v_\theta$ 和 $\delta\dot\beta$． 然而，導航問題和這個問題是不同的，在導航問題裏所需要的是設法找出一個特別的函數 $\delta\gamma$（也就是升降舵角度的改正動作程序）使得射程偏差是零．正如德瑞尼克所建議的那樣，這個導航問題可以用布利斯(G. A. Bliss)的**伴隨函數法**來解決[1]．

### 13.3 伴隨函數

**伴隨函數法**的原理是這樣的：假設 $y_i(t)(i=1, 2, \cdots, n)$ 是由下列 $n$ 個綫性方程組成的方程組確定的 $n$ 個函數，

1) G. A. Bliss, "Mathematics for Exterior Ballistics," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1944.

$$\frac{dy_i}{dt} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = Y_i(t) \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{13.21}$$

其中，$a_{ij}$ 是給定的系數，它們可以是時間 $t$ 的函數．$Y_i(t)$ 都是"驅動"函數(輸入)． 現在我們再引進一組新的函數 $\lambda_i(t)(i = 1, 2, \cdots, n)$，它們滿足下列的齊次方程組

$$\frac{d\lambda_i}{dt} + \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \lambda_j = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{13.22}$$

這樣一組 $\lambda_i(t)$ 就稱爲那一組 $y_i(t)$ 的伴隨函數． 用 $\lambda_i$ 乘方程 (13.21)，再用 $y_i$ 乘方程 (13.22)，然後再對於 $i$ 把這些方程加起來，我們就得出

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \lambda_i y_j - a_{ji} \lambda_j y_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i.$$

很明顯，雙重和數中的兩部分剛好互相抵消掉，所以，我們就得到

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i. \tag{13.23}$$

可以把這個方程從時刻 $t = t_1$ 到時刻 $t = t_2$ 積分，因而得出

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \Bigg|_{t=t_2} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \Bigg|_{t=t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i \right) dt. \tag{13.24}$$

布利斯把這個方程稱爲基本公式．

對於我們正在討論的長距離火箭的問題來說，$y_i$ 就是那些擾動量，因而 $n = 6$，並且

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \delta r, & y_2 &= \delta\theta, & y_3 &= \delta\beta, \\ y_4 &= \delta v_r, & y_5 &= \delta v_\theta, & y_6 &= \delta\dot{\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{13.25}$$

根據方程(13.19)，這時的伴隨函數 $\lambda_i(t)$就滿足下列方程組

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\bar{v}_\theta}{\bar{r}^2}\lambda_2 + a_1\lambda_4 + b_1\lambda_5 + c_1\lambda_6, \\
-\frac{d\lambda_2}{dt} &= 0, \\
-\frac{d\lambda_3}{dt} &= a_2\lambda_4 + b_2\lambda_5 + c_2\lambda_6, \\
-\frac{d\lambda_4}{dt} &= \lambda_1 + a_3\lambda_4 + b_3\lambda_5 + c_3\lambda_6, \\
-\frac{d\lambda_5}{dt} &= \frac{1}{\bar{r}}\lambda_2 + a_4\lambda_4 + b_4\lambda_5 + c_4\lambda_6, \\
-\frac{d\lambda_6}{dt} &= \lambda_3,
\end{aligned}\right\} \tag{13.26}$$

各個輸入 $Y_i$ 就是

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0, \tag{13.27}$$

$$\left.\begin{aligned}Y_4 &= a_5\delta\gamma + a_6\delta\rho + a_7\delta T + a_8\delta w + a_9\delta W,\\ Y_5 &= b_5\delta\gamma + b_6\delta\rho + b_7\delta T + b_8\delta w + b_9\delta W,\\ Y_6 &= c_5\delta\gamma + c_6\delta\rho + c_7\delta T + c_8\delta w + c_9\delta W + c_{10}\delta I.\end{aligned}\right\} \tag{13.28}$$

## 13.4 射程的改正

方程(13.26)並不能把那些 $\lambda$ 函數完全確定出來．如果要完全確定 $\lambda$ 函數，就必須給出在某一個一定的時刻的一組 $\lambda$ 值． 至於應該在哪一個時刻取這一組 $\lambda$ 等於什麼數值，這個問題，是與特定的控制設計的要求有關的．在我們的導航問題中，我們的設計要求射程偏差是零；所以，使我們感到興趣的數量就是火箭着陸時刻的 $\delta\theta$ 值 $\delta\theta_2$；附帶聲明一下：從現在起，我們用下標"2"來表示各個數量在着陸時刻的值．下面我們就可以看到：射程偏差是零的條件就足够把所有的 $\lambda$ 完全確定了．

如果 $t_2$ 是實際的火箭的着陸時間，$\bar{t}_2$ 是正規飛行路綫的着陸時間，於是

$$t_2 = \bar{t}_2 + \delta t_2, \tag{13.29}$$

同樣，

$$\left.\begin{aligned}r_2 &= \bar{r}_2 + \delta r_2,\\ \theta_2 &= \bar{\theta}_2 + \delta\theta_2.\end{aligned}\right\} \tag{13.30}$$

不難證明

$$\left.\begin{aligned}\delta r_2 &= (\bar{v}_r)_{t=\bar{t}_2}\delta t_2 + (\delta r)_{t=\bar{t}_2},\\ \delta\theta_2 &= \frac{1}{r_0}(\bar{v}_\theta)_{t=\bar{t}_2}\delta t_2 + (\delta\theta)_{t=\bar{t}_2}.\end{aligned}\right\} \tag{13.31}$$

然而，因為不論什麼路綫的着陸點都在地球表面上，所以 $\delta r_2$ 一定是零，或者說 $r_2 = \bar{r}_2 = r_0$．從方程組(13.31)中消去 $\delta t_2$ 就得

$$\delta\theta_2 = \left[-\frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{\bar{v}_\theta}{\bar{v}_r}\right)\delta r + \delta\theta\right]_{t=\bar{t}_2}. \tag{13.32}$$

因此，如果讓各個 $\lambda_i$ 函數在着陸時刻 $t = \bar{t}_2$ 時的值是

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1 = -\frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{\bar{v}_\theta}{\bar{v}_r}\right),\quad \lambda_2 = 1,\\ &\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0,\end{aligned}\right\} \tag{13.33}$$

於是射程偏差就是

$$\delta\theta_2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\bigg|_{t=\bar{t}_2} = [\lambda_1\delta r + \lambda_2\delta\theta + \lambda_3\delta\beta + \lambda_4\delta v_r + \lambda_5\delta v_\theta + \lambda_6\delta\dot{\beta}]_{t=\bar{t}_2}. \tag{13.34}$$

如果已經把正規飛行路綫確定出來了，那末，方程組(13.26)的各個系數就都是已知的時間函數．把這個方程組與終點條件(13.33)合併起來考慮，就可以把六個伴隨函數完全確定．事實上，我們可以用一個快速計算機從 $t = \bar{t}_2$ 開始，"倒退地"(也就是對於 $t < \bar{t}_2$ 在 $t$ 逐漸減小的方向上) 把方程(13.26)進行數值積分．把伴隨函數這樣確定出來以後，我們就可以利用方程(13.24)的基本公式來修正射程偏差的方程(13.34)：用 $\bar{t}_1$ 表示正規飛行路綫的發動機的關車時間，於是射程偏差應該是零的條件就可以表示爲

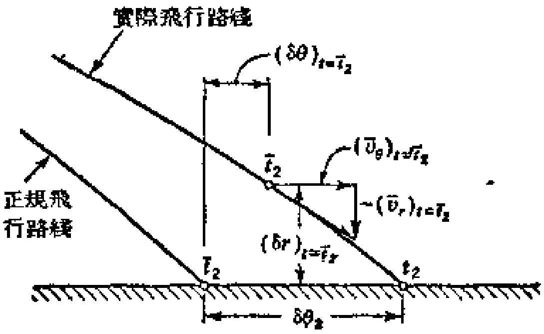



圖 13.2

$$\delta\theta_2 = 0 = [\lambda_1\delta r + \lambda_2\delta\theta + \lambda_3\delta\beta + \lambda_4\delta v_r + \lambda_5\delta v_\theta + \lambda_6\delta\dot{\beta}]_{t=\bar{t}_1} + \int_{t=\bar{t}_1}^{t=\bar{t}_2} [\lambda_4 Y_4 + \lambda_5 Y_5 + \lambda_6 Y_6] dt. \tag{13.35}$$

這就是導航問題的基本方程．在以下各節裏，我們就要根據這個方程來討論導航問題．

### 13.5　關車條件

方程(13.35)爲任意的擾動量所設的條件，可以分成兩部分：爲了滿足這個條件，我們可以讓方程中的和數和積分分別地等於零．因此，在正規飛行路綫的關車時刻 $\bar{t}_1$，應當滿足的條件就是

$$[\lambda_1\delta r + \lambda_2\delta\theta + \lambda_3\delta\beta + \lambda_4\delta v_r + \lambda_5\delta v_\theta + \lambda_6\delta\dot{\beta}]_{t=\bar{t}_1} = 0. \tag{13.36}$$

旣然正規關車時刻 $\bar{t}_1$ 只是一個標準的時刻，所以，它不一定等於實際的關車時刻 $t_1$，也就是說

$$t_1 = \bar{t}_1 + \delta t_1. \tag{13.37}$$

因此，爲了更實用的目的，我們就應該把方程(13.36)變爲一個用實際關車時刻的各個量所表示的條件，然而，這是不難作到的，因爲我們在條件(13.35)中只考慮到一階量，不難證明

$$(\delta r)_{t=\bar{t}_1} = (r)_{t=t_1} - \left(\overline{\frac{dr}{dt}}\right)_{t=\bar{t}_1} \delta t_1 - (\bar{r})_{t=\bar{t}_1}$$

也就是

$$(\delta r)_{t=\bar{t}_1} = (r)_{t=t_1} - (\bar{r})_{t=\bar{t}_1} - (\bar{v}_r)_{t=\bar{t}_1}\delta t_1.$$

類似地，

$$(\delta\theta)_{t=\bar{t}_1} = (\theta)_{t=t_1} - (\bar{\theta})_{t=\bar{t}_1} - \left(\frac{1}{\bar{r}}\bar{v}_\theta\right)_{t=\bar{t}_1} \delta t_1,$$

$$(\delta\beta)_{t=\bar{t}_1} = (\beta)_{t=t_1} - (\bar{\beta})_{t=\bar{t}_1} - (\dot{\bar{\beta}})_{t=\bar{t}_1}\delta t_1,$$

$$(\delta v_r)_{t=\bar{t}_1} = (v_r)_{t=t_1} - (\bar{v}_r)_{t=\bar{t}_1} - (\bar{F})_{t=\bar{t}_1}\delta t_1,$$

$$(\delta v_\theta)_{t=\bar{t}_1} = (v_\theta)_{t=t_1} - (\bar{v}_\theta)_{t=\bar{t}_1} - (\bar{G})_{t=\bar{t}_1}\delta t_1,$$

$$(\delta\dot{\beta})_{t=\bar{t}_1} = (\dot{\beta})_{t=t_1} - (\dot{\bar{\beta}})_{t=\bar{t}_1} - (\bar{H})_{t=\bar{t}_1}\delta t_1,$$

其中，$\bar{F}$, $\bar{G}$ 和 $\bar{H}$ 就是方程組(13.14)所定義的 $F$, $G$ 和 $H$ 在正規飛行路綫上計算出來的

値．事實上，$\bar{F}$, $\bar{G}$ 和 $\bar{H}$ 應該在正規關車時刻 $\bar{t}_1$ 的前一瞬間計算，這樣計算的結果就包含了火箭的加速度力的因素，因而速度的變化率也就是開動發動機的飛行的速度變化率．現在，按照下列公式定義 $J$ 和 $\bar{J}$：

$$\left.\begin{aligned} J &= [\lambda_1^* r + \lambda_2^* \theta + \lambda_3^* \beta + \lambda_4^* v_r + \lambda_5^* v_\theta + \lambda_6^* \dot{\beta}]_{t=t_1}, \\ \bar{J} &= [\lambda_1^* \bar{r} + \lambda_2^* \bar{\theta} + \lambda_3^* \bar{\beta} + \lambda_4^* \bar{v}_r + \lambda_5^* \bar{v}_\theta + \lambda_6^* \dot{\bar{\beta}}]_{t=\bar{t}_1}, \end{aligned}\right\} \tag{13.38}$$

這裏的 $\lambda_i^*$ 就是 $\lambda_i$ 在正規關車時刻 $\bar{t}_1$ 的值，$\lambda_i^* = \lambda_i(\bar{t}_1)$．根據方程(13.36)在實際的關車時刻 $t_1$ 應該滿足的條件就是：

$$J = \bar{J} + [\lambda_1^* \bar{v}_r + \lambda_2^* \frac{\bar{v}_\theta}{\bar{r}} + \lambda_3^* \dot{\bar{\beta}} + \lambda_4^* \bar{F} + \lambda_5^* \bar{G} + \lambda_6^* \bar{H}]_{t=\bar{t}_1}(t_1 - \bar{t}_1). \tag{13.39}$$

這就是確定合適的發動機關車時刻的方程．

當正規飛行路綫已知時，$\bar{J}$ 和方程(13.39)括弧中的數量也就是已知的．如果把 $t_1$ 換成 $t$，方程(13.39)的右端就可以看作是一個時間 $t$ 的綫性增函數，同時，在關車以前的每一個時刻，我們都可以用已經事先確定好的 $\lambda_i^*$ 值以及跟踪站(也就是另外一個隨時測量火箭的位置和運動狀態的裝置）測量得到的火箭實際位置和實際速度的數據把 $J$ 立刻用計算機計算出來．再用計算機把方程(13.39)兩端的兩個量不斷地進行比較，當這兩個量相等時，方程(13.39)的條件就被滿足了．這時導航裝置就發出關車信號，火箭發動機也就停止工作．

### 13.6 導航條件

火箭發動機的關車時間總是可能比正規關車時刻 $\bar{t}_1$ 早一些或者遲一些，如果關車後不把剩餘的燃料丢掉，那末這些剩餘燃料的數量就會與標準值不同，於是火箭的重量 $W$ 和轉動慣量 $I$ 就要發生改變．另外，火箭的有用負載(例如，炸藥)也可能與標準火箭的負載不同．於是，在發動機關車以後，就有了一個固定的 $\delta W$ 和 $\delta I$，這兩個偏差都不隨時間變化，而且只要一關車我們就可以知道這兩個數值．然而，實際大氣情況與標準大氣情況之間的偏差 $\delta\rho$, $\delta T$ 和 $\delta w$ 的情形就完全不同了，這些量都是不能事先知道的，只有隨時隨地加以測量才能得到這些量的數據，在以下討論中，我們假定火箭本身就能測量這些偏差量，這樣，我們就可以進行以下的討論．

滿足了關車條件以後，要求射程偏差等於零的條件就是方程(13.35)裏的積分必須等於零．因爲被積函數的 $Y_i$ 裏包含有不能預先知道的任意擾動量 $\delta\rho$, $\delta T$ 和 $\delta w$，所以，爲了滿足積分等於零的條件，我們就規定被積函數本身等於零．按照方程組(13.28)，這個條件就是

$$\begin{aligned}(\lambda_4 a_5 + \lambda_5 b_5 + \lambda_6 c_5)\delta\gamma &+ (\lambda_4 a_6 + \lambda_5 b_6 + \lambda_6 c_6)\delta\rho \\ &+ (\lambda_4 a_7 + \lambda_5 b_7 + \lambda_6 c_7)\delta T + (\lambda_4 a_8 + \lambda_5 b_8 + \lambda_6 c_8)\delta w \\ &+ (\lambda_4 a_9 + \lambda_5 a_9 + \lambda_6 c_9)\delta W + \lambda_6 c_{10}\delta I = 0,\end{aligned}$$

如果採用下列符號

$$\begin{aligned} d_5 &= \lambda_4 a_5 + \lambda_5 b_5 + \lambda_6 c_5, \\ d_6 &= \lambda_4 a_6 + \lambda_5 b_6 + \lambda_6 c_6, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} d_7 &= \lambda_4 a_7 + \lambda_5 b_7 + \lambda_6 c_7, \\ d_8 &= \lambda_4 a_8 + \lambda_5 b_8 + \lambda_6 c_8, \\ D &= -(\lambda_4 a_9 + \lambda_5 b_9 + \lambda_6 c_9)\delta W - \lambda_6 c_{10}\delta I, \end{aligned}\right\} \tag{13.40}$$

這個條件就可以寫成

$$d_5\delta\gamma + d_6\delta\rho + d_7\delta T + d_8\delta w = D. \tag{13.41}$$

方程(13.19)可以改寫成

$$\left.\begin{aligned} a_5\delta\gamma + a_6\delta\rho + a_7\delta T + a_8\delta w &= A, \\ b_5\delta\gamma + b_6\delta\rho + b_7\delta T + b_8\delta w &= B, \\ c_5\delta\gamma + c_6\delta\rho + c_7\delta T + c_8\delta w &= C, \end{aligned}\right\} \tag{13.42}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{d\delta v_r}{dt} - a_1\delta r - a_2\delta\beta - a_3\delta v_r - a_4\delta v_\theta - a_9\delta W, \\ B &= \frac{d\delta v_\theta}{dt} - b_1\delta r - b_2\delta\beta - b_3\delta v_r - b_4\delta v_\theta - b_9\delta W, \\ C &= \frac{d\delta\dot{\beta}}{dt} - c_1\delta r - c_2\delta\beta - c_3\delta v_r - c_4\delta v_\theta - c_9\delta W - c_{10}\delta I. \end{aligned}\right\} \tag{13.43}$$

如果火箭的跟踪站隨時測量 $A$, $B$, $C$ 這三個量,而且,火箭攜帶的儀器又能把 $\delta\rho$, $\delta T$ 和 $\delta w$ 這三個量中的某一個隨時加以測量,利用這些測量的結果,根據方程組(13.42)中的兩個方程就可以把其餘兩個大氣情況偏差量用 $\delta\gamma$ 和已知的時間函數表示出來(譬如說,火箭上的儀器隨時把溫度偏差 $\delta T$ 測量出來,再從跟踪站所測得的三個量 $A$, $B$, $C$ 中選用 $A$ 和 $B$ 兩個量,最後,利用方程組(13.42)的前兩個方程就可以把 $\delta\rho$ 和 $\delta w$ 是已知的時間函數和 $\delta\gamma$ 表示出來). 這個作法的實質也就是藉助於火箭本身來確定 $\delta\rho$, $\delta T$ 和 $\delta w$. 這樣定出 $\delta\rho$, $\delta T$ 和 $\delta w$ 以後,把這些量代入方程(13.41)就得出 $\delta\gamma$ 的方程,

$$\delta\gamma = \frac{1}{d_5}\left[D - d_6\delta\rho - d_7\delta T - d_8\delta w\right]. \tag{13.44}$$

利用這個方程就可以根據當時的 $a$, $b$, $c$, 以及 $A$, $B$, $C$, $D$ 求出 $\delta\gamma$ 在每一時刻的值. 已經講過,這些 $a$, $b$, $c$ 和 $A$, $B$, $C$, $D$ 中有一部分是可以預先根據正規飛行路綫計算出來的,另一部分是跟踪站根據對於火箭的位置和速度的測量而得出的. 在很高的高度上空氣的密度很小,所以,那些空氣動力比起重力和慣性力來就小得很多,幾乎是可以忽略掉的. 這時,方程(13.43)的 $A$, $B$ 和 $C$ 都是一些很大的數量之間的小差數(譬如,$\delta r$ 就是 $\bar{r}$ 和 $r$ 這兩個大數量的差數),所以,很難把這三個量精確地測量出來. 如果在實際飛行中使升降舵就按照方程(13.44)的規律運動,並且按照上一節的辦法在適當的時刻關車,那末,儘管實際飛行情况與標準情况之間有各種偏差,火箭還是在規定的地點着陸,這樣就達到了預定的目的:射程偏差等於零.

### 13.7 導航系統

當我們根據全盤的技術考慮把飛行路綫的一般特性選定以後,第一步工作就是根據標準大氣的性質以及標準重量的火箭的預期的性能把正規飛行路綫計算出來. 關於正規

飛行路綫的知識使我們能够把那些 $a$, $b$, $c$ 也都確定下來．根據方程 (13.26) 以及方程 (13.33)的終點條件就可以算出所有的伴隨函數 $\lambda_i$. 以上這些資料在火箭的實際飛行以前就必須準備好，這些資料可以稱爲儲存數據.

在發動機關車以前，可以讓升降舵角度就按照與正規飛行路綫相同的程序進行運動．同時依靠尾噴管或輔助火箭發動機來維持火箭的穩定性．跟踪站從火箭起飛的時刻就開始工作，它隨時把火箭的位置和速度的資料送到火箭上去，這些資料就被送到關車計算機裏去，關車計算機利用這些資料以及已有的儲存數據，把關車條件方程(13.39)兩端的兩個量不斷地進行比較，當關車條件(13.39)被滿足的時候，計算機就發出信號使發動機關車.

在關車的時刻以後，跟踪站送來的資料就改送到導航系統的計算機(導航計算機)中去，而不再送到關車計算機中去了．在關車時刻的同時也把剩餘的燃料量確定下來，從而定出重量$W$和轉動慣量 $I$ 與標準值之間的偏差 $\delta W$ 和 $\delta I$. 根據這些資料以及由正規飛行路綫計算出來的儲存數據，導航計算機就按照方程(13.40)，(13.43)和(13.44)算出升降舵角的應有的改正量 $\delta\gamma$. 從理論上講，計算機收到資料時就必須立刻把 $\delta\gamma$ 算出來，不應該有時間的遲延，因爲方程(13.44)是兩個量在同一時刻的值相等的條件．計算出來的 $\delta\gamma$ 與從正規飛行路綫計算出來的已知的 $\bar{\gamma}$ 合併起來就給出實際的升降舵角應取的值 $\gamma=\bar{\gamma}+\delta\gamma$. 根據這個信號 $\gamma$ 來轉動升降舵的控制機構就可以用普通的反饋伺服系統的方法加以設計，使這個機構在反應速度，穩定性和準確性上都能滿足要求．這樣一個導航系統的大致情形可以用圖 13.3 來表示.

這裏所用的計算機都是安裝在火箭上的，它們從沿着飛行路綫的一些固定的地面跟踪站接收到關於位置和速度的資料，正像圖 13.3 所表示的那樣，這就是整個控制系統的

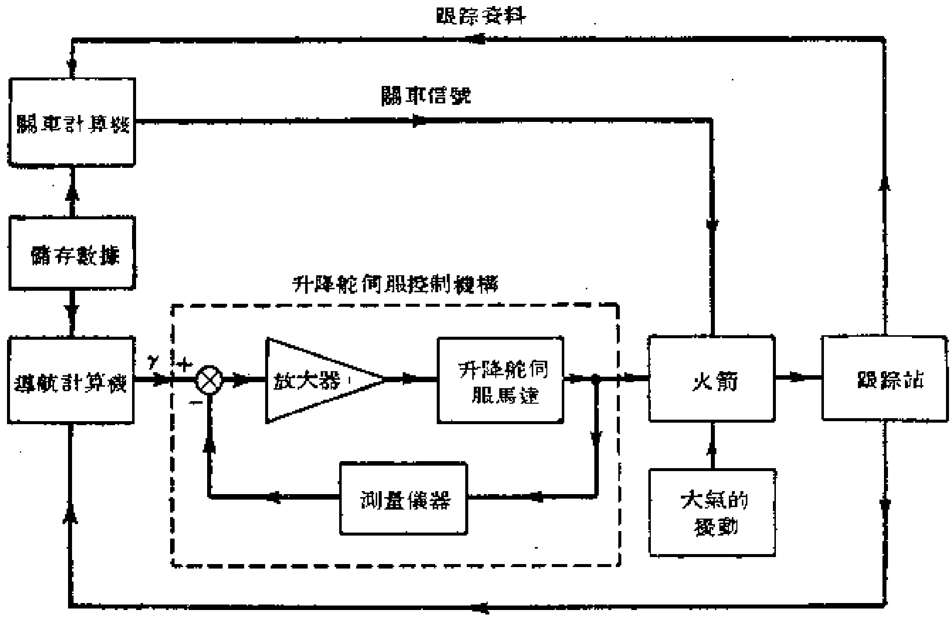



圖　13.3

反饋部分. 這裏,一些適當地設計出來的計算機能够使系統具有規定的性能,它們的作用與普通的伺服系統裏的放大器或補償綫路的作用是一樣的. 所以,從總的基本概念上來看,導航系統與以前各章研究過的普通的伺服系統是非常類似的. 可是,導航系統是一種很複雜的系統. 在它的設計工作中需要用到彈道攝動理論,因而也牽涉到伴隨函數的概念. 這個長距離火箭的導航問題的例子,雖然簡化得有些過分,可是,還可以用來說明怎樣用彈道攝動理論來設計控制系統的問題. 在這個例子裏,只有使射程偏差等於零這樣一個設計要求. 在某些更複雜的系統裏,往往會提出若干個設計要求,因而也就需要若干組伴隨函數. 雖然如此,設計那些系統的原則還是和所講的簡單例子相同.

**13.8 控制計算機**

雖然我們並不準備在這本書裏討論控制系統的某些元件的詳細構造和有關的技術問題,但是,在比較現代化的控制系統中,計算機的作用非常重要(在第十章關於最優開關的討論中,我們第一次提到計算機的問題),所以,把它們的特性和它們的要求在這裏一般地討論一下或許是恰當的. 至於詳細的情形,讀者可以去參閱關於這個專門問題的書[1].

常用的計算機有兩類:一類是模擬計算機,另一類是數字計算機. 模擬計算機,正像它的名稱的含義一樣,是設計者所企圖解決的問題的一個物理模擬. 所以,模擬計算機也就是以下的性質的一個系統:描寫這個系統的數學形式(譬如,系統的運動方程)和需要進行計算的問題的數學形式相同. 這種計算機的輸入總是某種物理量的值,例如,電壓,電流,一個軸的轉角的度數,一個彈簧的壓縮量等等. 計算機按照它本身的構造的物理規律把這種輸入轉換成作爲輸出的其他的物理量,計算機的構造當然是設計者爲了代表(模擬)預定的數學形式(或計算程序)而特別設計的. 所以,在控制系統中,模擬計算機的輸入就是被控制系統的某幾個物理量的測量讀數,計算機的輸出就是一些命令信號,這些命令信號被直接送到那些被控制量的個別的伺服系統中去.

與模擬計算機相反,數字計算機是用計數(數值計算)的方式工作的. 問題的數據必須用數字的形式放到計算機裏去,計算機就按照算術的規則以及其他必需的形式邏輯的規則根據輸入的資料進行計算,最後,把計算的結果(輸出)仍然用數字的形式表示出來. 如果採用這種計算方法,就會產生兩個很重要的結論:第一,必須適當地設計轉換器(也就是送進輸入信號和送出輸出信號的裝置),設法使數字計算機的"邏輯世界"與被控制系統的"物理世界"之間建立一種合適的轉換關系,也就是說,轉換器必須能把具體的物理量化爲抽象的數字,也能把抽象的數字用具體的物理量表示出來. 第二,必須把需要計算的問題明確地用數學方式(計算程序或方程等)表達出來.

在模擬計算機的情形裏,問題的性質(數學性質)已經被計算機本身的構造決定了,也就是說,只能解決某些數學性質與計算機的構造的數學性質相同的特別的問題. 可是,數

1) 參閱 Engineering Research Associates, "High-speed Computing Devices," McGraw-Hill Book Company, Inc., 1950. 關於直流模擬計算機,請參閱 G. A. Korn and T. M. Korn, "Electronic Analog Computers," McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952. 參閱[5]第3卷及[27].

字計算機的構造就並不是由某一個特別的物理問題或者某一類物理問題決定的（模擬計算機就是那樣的！），而是由解決某一類計算問題所需要的邏輯規則所確定的.（請注意計算的邏輯規則相同的問題並不一定是數學性質相同的問題！）

把數字計算機和模擬計算機作為控制系統的元件來加以比較，首先，我們就會看到，對於簡單的控制問題的應用來說，模擬計算機幾乎總是比數字計算機簡便得多. 即使是最簡單的數字計算機也包含下列幾部分：計算裝置，儲存數據的裝置，控制裝置，輸入轉換器和輸出轉換器. 對於簡單的控制問題來說，這樣多的裝置實在是太浪費太複雜了. 相反地，模擬計算機就不需要這樣不必要的複雜. 以前已經講過，普通的伺服系統中的補償綫路實質上也就是這樣一個模擬計算機.

當計算問題更加複雜的時候（例如這一章所討論的導航問題的情形）模擬計算機就失去它的優越性，同時我們又可以看到兩種計算機的第二個根本的區別. 模擬計算機是問題的一個物理模擬裝置，所以，計算問題越複雜，模擬計算機也就越複雜，如果它是一個機械系統，那末，系統中的齒輪組，球盤積分器的個數也就越多，而且還需要增加其他的裝置；如果模擬計算機是電氣的，那末，系統中的放大器的個數也就要越多. 在機械的情形裏，齒輪和接頭的間隙總是不可避免的，雖然在簡單的情形裏這種影響都可以忽略，可是當系統越來越龐大的時候，這些效應就逐漸增加，增加到一定的程度以後，系統的總間隙（或者稱為"遊隙"）就會比重要的輸出量還大，於是這個計算機就毫無用處了. 在電氣的情形裏，在電路中總是有隨機的電磁干擾和噪聲，這些作用也同樣地會隨着系統的增大而增加起來，最後可以把有用的信號完全淹沒掉. 因為相對地講，噪聲的影響遠不如間隙那樣有害，所以，電氣模擬計算機可以比機械模擬計算機複雜得多，但是，終歸還是有一個限度. 與此相反，數字計算機完全不受間隙效應和噪聲的影響. 數字計算機所能處理的問題的複雜程度也沒有本質性的限制.

模擬計算機與數字計算機之間，第三個重要的區別就是可能達到的準確度. 在模擬計算機裏，對於各個有關的物理量的測量和處理總有一定的誤差，而且根據一些理想化的物理定律來表示或設計實際的物理系統也必然有誤差，所以模擬計算機的準確度也就受到限制. 在實際情況中，最好的模擬計算機的準確度差不多是 1/10000，普通的模擬計算機只能準確到 1/100 或 2/100. 對於某些具體問題來說，這種準確度已經够了，對於另外一些問題這種準確度就完全不够了. 相反地，數字計算機所處理的是數字，所以，需要多麼準確就可以作到多麼準確. 如果希望提高準確度，我們只要把代表每一個被處理的量的有效數字的位數增加就可以了. 當然，整個計算機的準確度由於轉換器的準確度的限制也還是有限制的，但是，這並不能改變這樣的事實：在需要準確度很高的情况中，數字計算機總是比模擬計算機好得多.

兩類計算機之間還有第四個不同之處. 我們可以說，一個模擬計算機是在"實在的時間"中工作的，這也就是說，它連續地給出它所處理的問題的解，而且，在每一個時刻這個給出的解都相應於在同一時刻進入計算機的所有的輸入值. 與此相反，數字計算機的工作方式是：把問題先化為數值計算的問題，然後再去解這個計算問題的一個明確的"邏輯

模型". 所以,數字計算機只能在一系統離散的時刻上給出輸出的數值,不但如此,因爲計算過程需要花費時間,雖然這個時間很短,輸出還是落後於輸入的. 因此,就發生了兩個問題:第一,如何用內插法把各個離散時刻之間的輸出確定出來? 第二,如何根據已有輸出值用預卜法預卜以後的輸出值,從而可以避免輸出的時滯. 很明顯,如果計算過程所用的時間比被控制系統的時間常數小得很多,就不必考慮預卜問題,同時也就可以認爲計算機是在"實在的時間"中工作的. 在這一點上,現代的電子數字計算機對於前面所討論的長距離火箭的導航問題來說似乎是足够迅速了,但是,對於高速度的導彈來說,電子計算機的時滯的影響還必須在控制系統的設計中加以考慮.

## 第十三章的附錄

## 攝動系數的計算

$F$, $G$ 和 $H$ 是由方程組(13.14)所定義的. 它們包含有參數 $\Sigma$, $\Lambda$, $\Delta$ 和 $N$. 根據方程(13.2)和(13.13)所給的定義,這些參數可以寫成下列形式:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma &= \frac{Sg}{W},\\
\Lambda &= \frac{g}{W}\,\frac{1}{2}\,\rho A C_L\sqrt{v_r^2+(v_\theta+w)^2},\\
\Delta &= \frac{g}{W}\,\frac{1}{2}\,\rho A C_D\sqrt{v_r^2+(v_\theta+w)^2},\\
N &= \frac{1}{I}\,\frac{1}{2}\,\rho A C_M\{v_r^2+(v_\theta+w)^2\},
\end{aligned}\right\}\tag{13,45}$$

其中的空氣動力系數 $C_L$, $C_D$ 和 $C_M$ 都是冲角 $\alpha$, 升降舵角 $\gamma$, 馬赫數 $M$ 和雷諾數 Re 的函數; 這些空氣動力學參數與飛行路綫的各個量顯然有以下的關係:

$$\alpha = \beta - \tan^{-1}\left(\frac{v_r}{v_\theta+w}\right),\quad M = \frac{V}{a(r)},\quad \mathrm{Re} = \frac{\rho V l}{\mu(r)},\tag{13,46}$$

其中 $a(r)$ 是空氣的音速, $\mu(r)$ 是空氣的粘性系數,這兩個量都是高度 $r$ 的函數. 在以下的計算中,推力 $S$ 只看作是高度的函數. 我們也假定空氣在各個高度上的化學成分都與標準大氣的情况相同;只有密度 $\rho$ 和溫度 $T$ 與標準值不相同. 所以,在任意高度上 $a$ 和 $\mu$ 的偏差都只是由於溫度 $T$ 的偏差而產生的.

對於 $\Sigma$ 來說:

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial r} = \frac{g}{W}\,\frac{\partial S}{\partial r},\quad \frac{\partial\Sigma}{\partial W} = -\frac{\Sigma}{W}.\tag{13,47}$$

所有其餘的偏導數都是零.

對於 $\Lambda$ 來說:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Lambda}{\partial r} &= \Lambda\left\{\frac{1}{\rho}\,\frac{d\rho}{dr}\left(1+\frac{\mathrm{Re}}{C_L}\,\frac{\partial C_L}{\partial\mathrm{Re}}\right)+\frac{1}{V^2}\,\frac{dw}{dr}\left[\left(\frac{M}{C_L}\,\frac{\partial C_L}{\partial M}+\frac{\mathrm{Re}}{C_L}\,\frac{\partial C_L}{\partial\mathrm{Re}}+1\right)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\cdot(v_\theta+w)+\frac{1}{C_L}\,\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}\,v_r\right]-\frac{M}{C_L}\,\frac{\partial C_L}{\partial M}\,\frac{1}{a}\,\frac{da}{dr}-\frac{\mathrm{Re}}{C_L}\,\frac{\partial C_L}{\partial\mathrm{Re}}\,\frac{1}{\mu}\,\frac{d\mu}{dr}\right\},\\
\frac{\partial\Lambda}{\partial v_r} &= \Lambda\,\frac{v_r}{V^2}\left(\frac{M}{C_L}\,\frac{\partial C_L}{\partial M}+\frac{\mathrm{Re}}{C_L}\,\frac{\partial C_L}{\partial\mathrm{Re}}+1-\frac{1}{C_L}\,\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}\,\frac{v_\theta+w}{v_r}\right),
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda}{\partial v_\theta} &= \Lambda \frac{v_\theta + w}{V^2}\left(\frac{M}{C_L}\frac{\partial C_L}{\partial M} + \frac{\mathrm{Re}}{C_L}\frac{\partial C_L}{\partial \mathrm{Re}} + 1 + \frac{1}{C_L}\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\frac{v_r}{v_\theta + w}\right),\\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} &= \Lambda \frac{1}{C_L}\frac{\partial C_L}{\partial \alpha},\\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma} &= \Lambda \frac{1}{C_L}\frac{\partial C_L}{\partial \gamma},\\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} &= \Lambda \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{\mathrm{Re}}{C_L}\frac{\partial C_L}{\partial \mathrm{Re}}\right),\\
\frac{\partial \Lambda}{\partial T} &= -\Lambda\left(\frac{M}{C_L}\frac{\partial C_L}{\partial M}\frac{1}{2T} + \frac{\mathrm{Re}}{C_L}\frac{\partial C_L}{\partial \mathrm{Re}}\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial T}\right),\\
\frac{\partial \Lambda}{\partial w} &= \Lambda \frac{v_\theta + w}{V^2}\left(\frac{M}{C_L}\frac{\partial C_L}{\partial M} + \frac{\mathrm{Re}}{C_L}\frac{\partial C_L}{\partial \mathrm{Re}} + 1 + \frac{1}{C_L}\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\frac{v_r}{v_\theta + w}\right) = \frac{\partial \Lambda}{\partial v_\theta},\\
\frac{\partial \Lambda}{\partial W} &= -\frac{\Lambda}{W}.
\end{aligned}\right\}\qquad (13,48)$$

只要在方程(13,48)中用$\Delta$代替$\Lambda$，以$C_D$代替$C_L$就可以得到$\Delta$的各個偏導數，這裏不再寫出。

對於$N$來說:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial r} &= N\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr}\left(1 + \frac{\mathrm{Re}}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial \mathrm{Re}}\right) + \frac{1}{V^2}\frac{dw}{dr}\left[\left(\frac{M}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial M} + \frac{\mathrm{Re}}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial \mathrm{Re}} + 2\right)\right.\right.\\
&\quad \left.\left.\cdot (v_\theta + w) + \frac{1}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial \alpha}v_r\right] - \frac{M}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial M}\frac{1}{a}\frac{da}{dr} - \frac{\mathrm{Re}}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial \mathrm{Re}}\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dr}\right\},\\
\frac{\partial N}{\partial v_r} &= N\frac{v_r}{V^2}\left(\frac{M}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial M} + \frac{\mathrm{Re}}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial \mathrm{Re}} + 2 - \frac{1}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial \alpha}\frac{v_\theta + w}{v_r}\right),\\
\frac{\partial N}{\partial v_\theta} &= N\frac{v_\theta + w}{V^2}\left(\frac{M}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial M} + \frac{\mathrm{Re}}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial \mathrm{Re}} + 2 + \frac{1}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial \alpha}\frac{v_r}{v_\theta + w}\right),\\
\frac{\partial N}{\partial \beta} &= N\frac{1}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial \alpha},\\
\frac{\partial N}{\partial \gamma} &= N\frac{1}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial \gamma},\\
\frac{\partial N}{\partial \rho} &= N\frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{\mathrm{Re}}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial \mathrm{Re}}\right),\\
\frac{\partial N}{\partial T} &= -N\left(\frac{M}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial M}\frac{1}{2T} + \frac{\mathrm{Re}}{C_M}\frac{\partial C_M}{\partial \mathrm{Re}}\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial T}\right),\\
\frac{\partial N}{\partial w} &= \frac{\partial N}{\partial v_\theta},\\
\frac{\partial N}{\partial I} &= -\frac{N}{I}.
\end{aligned}\right\}\qquad (13,49)$$

根據以上這些偏導數，那些系數$a$，$b$，$c$就不難算出:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial \Sigma}{\partial r}\sin\beta + \frac{dw}{dr}\Lambda + (v_\theta + w)\frac{\partial \Lambda}{\partial r} - v_r\frac{\partial \Delta}{\partial r} + \left(\frac{v_\theta}{r} \pm \Omega\right)^2\\
&\qquad - 2\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{v_\theta}{r} \pm \Omega\right) + 2\frac{g}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2,\\
a_2 &= \frac{\partial F}{\partial \beta} = \Sigma\cos\beta + (v_\theta + w)\frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} - v_r\frac{\partial \Delta}{\partial \beta},
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_3 &= \frac{\partial F}{\partial v_r} = (v_\theta + w)\frac{\partial \Lambda}{\partial v_r} - \Delta - v_r\frac{\partial \Delta}{\partial v_r},\\
a_4 &= \frac{\partial F}{\partial v_\theta} = \Lambda + (v_\theta + w)\frac{\partial \Lambda}{\partial v_\theta} - v_r\frac{\partial \Delta}{\partial v_\theta} + 2\left(\frac{v_\theta}{r} \pm \Omega\right),\\
a_5 &= \frac{\partial F}{\partial \gamma} = (v_\theta + w)\frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma} - v_r\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma},\\
a_6 &= \frac{\partial F}{\partial \rho} = (v_\theta + w)\frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} - v_r\frac{\partial \Delta}{\partial \rho},\\
a_7 &= \frac{\partial F}{\partial T} = (v_\theta + w)\frac{\partial \Lambda}{\partial T} - v_r\frac{\partial \Delta}{\partial T},\\
a_8 &= \frac{\partial F}{\partial w} = \Lambda + (v_\theta + w)\frac{\partial \Lambda}{\partial w} - v_r\frac{\partial \Delta}{\partial w},\\
a_9 &= \frac{\partial F}{\partial W} = \frac{\partial \Sigma}{\partial W}\sin\beta + (v_\theta + w)\frac{\partial \Lambda}{\partial W} - v_r\frac{\partial \Delta}{\partial W}.
\end{aligned}\right\} \tag{13,50}$$

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial \Sigma}{\partial r}\cos\beta - v_r\frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{dw}{dr}\Delta - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r^2},\\
b_2 &= \frac{\partial G}{\partial \beta} = -\Sigma\sin\beta - v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial \beta},\\
b_3 &= \frac{\partial G}{\partial v_r} = -\Lambda - v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial v_r} - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial v_r} - 2\left(\frac{1}{2}\frac{v_\theta}{r} \pm \Omega\right),\\
b_4 &= \frac{\partial G}{\partial v_\theta} = -v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial v_\theta} - \Delta - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial v_\theta} - \frac{v_r}{r},\\
b_5 &= \frac{\partial G}{\partial \gamma} = -v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma} - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma},\\
b_6 &= \frac{\partial G}{\partial \rho} = -v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial \rho},\\
b_7 &= \frac{\partial G}{\partial T} = -v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial T} - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial T},\\
b_8 &= \frac{\partial G}{\partial w} = -v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial w} - \Delta - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial w},\\
b_9 &= \frac{\partial G}{\partial W} = \frac{\partial \Sigma}{\partial W}\cos\beta - v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial W} - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial W}.
\end{aligned}\right\} \tag{13,51}$$

$$\left.\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\left[\Sigma\cos\beta - v_r\Lambda - (v_\theta + w)\Delta - 2v_r\left(\frac{v_\theta}{r} \pm \Omega\right)\right]\\
&\quad + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial r}\cos\beta - v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial r} - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial r} + \frac{dw}{dr}\Delta + 2\frac{v_r v_\theta}{r^2}\right] + \frac{\partial N}{\partial r},\\
c_2 &= \frac{\partial H}{\partial \beta} = \frac{1}{r}\left[-\Sigma\sin\beta - v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial \beta}\right] + \frac{\partial N}{\partial \beta},\\
c_3 &= \frac{\partial H}{\partial v_r} = \frac{1}{r}\left[-\Lambda - v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial v_r} - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial v_r} - 2\left(\frac{v_\theta}{r} \pm \Omega\right)\right] + \frac{\partial N}{\partial v_r},\\
c_4 &= \frac{\partial H}{\partial v_\theta} = \frac{1}{r}\left[-v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial v_\theta} - \Delta - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial v_\theta} - 2\frac{v_r}{r}\right] + \frac{\partial N}{\partial v_\theta},\\
c_5 &= \frac{\partial H}{\partial \gamma} = \frac{1}{r}\left[-v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma} - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma}\right] + \frac{\partial N}{\partial \gamma},
\end{aligned}\right\} \tag{13,52}$$

$$\left.\begin{aligned}
c_6 &= \frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{1}{r}\left[-v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial \rho}\right] + \frac{\partial N}{\partial \rho},\\
c_7 &= \frac{\partial H}{\partial T} = \frac{1}{r}\left[-v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial T} - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial T}\right] + \frac{\partial N}{\partial T},\\
c_8 &= \frac{\partial H}{\partial w} = \frac{1}{r}\left[-v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial w} - \Delta - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial w}\right] + \frac{\partial N}{\partial w},\\
c_9 &= \frac{\partial H}{\partial W} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial W}\cos\beta - v_r\frac{\partial \Lambda}{\partial W} - (v_\theta + w)\frac{\partial \Delta}{\partial W}\right] + \frac{\partial N}{\partial W},\\
c_{10} &= \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\partial N}{\partial I}.
\end{aligned}\right\}$$

發動機關車以後,推力$S$就消失了. 因此,在 $t > t_1$ 時, $\Sigma$和$\Sigma$的各個偏導數都等於零.

# 第十四章

# 滿足指定積分條件的控制設計

在前面幾章裏，我們主要從分析的觀點去討論控制系統的設計問題．那就是，首先假定了系統的結構，然後找出系統具有什麼性能．

在上面一章裏，我們第一次引入了一種不同的、更爲直接的觀點：我們首先指定某些性能，然後尋求能夠給出所要求的性能的控制系統．本章內，我們將把這一原理用到任意的系統，這種控制系統中，希望被滿足的性能準則是用被控制量的積分表示的．結果得到一個非常普遍的微分方程來表示系統的性能，一般說來，這是一個非綫性的微分方程．按這種原理設計成功的控制系統通常就是一個非綫性系統．這裏非綫性的性質，是有目的地用來使系統能給出最優的性能．

我們把滿足指定積分條件的控制設計的數學原理敍述如下：在控制系統裏，我們引入一個或者若干個外加參數．這些外加參數是人爲地加進去的，而不是由控制系統內在的物理規律所確定的．由於系統必須滿足所有那些指定的積分條件，我們就可以得到決定外加參數的條件．然後通過安裝在系統裏的計算機使這些條件實現．這種控制設計原理首先由勃克森包姆和胡德(R. Hood)[1]提出．在下面的討論中，引用了這兩位作者的一部分工作．

### 14.1 控制的準則

假設 $y$ 代表系統的輸出．我們有理由認爲：控制系統的總的工作性能的量度可以表示成 $y$ 的某種函數 $f$ 對於時間的積分．於是性能準則就是這些積分取極小值 (min)，或者這些積分等於常數值(const)；也就是，

$$\int_0^{t_1} f(y)dt = \text{const 或 min} \tag{14.1}$$

或者，特別地，

$$\int_0^{t_1}(y-y_s)^2dt = \text{const 或 min}^{[16,17,56-58]}, \tag{14.2}$$

其中 $t_1$ 代表過渡過程終止的時刻，$y_s$ 表示指定量，或者希望輸出量 $y$ 能到達的量．方程(14.2)表示：在誤差產生的這段時間間隔內，測量出誤差的平方的總和，也即估計對於 $y_s$ 的平均平方誤差．另外一種類型的準則可以要求過渡過程經歷的時間最短，或者等於一個常數；那就是，

$$\int_0^{t_1} dt = \text{const 或 min.} \tag{14.3}$$

---

1) A. S. Boksenbom and R. Hood, *NACA TR* 1068 (1952).

假設僅僅採用單獨某一個準則，比如方程(14.1)，結果會得到 $f(y)=\text{const}$，因爲要是沒有另外的準則加到系統裏其它變量上的話，這個結論是合理的，一般說來 $f(y)$ 可以等於常數值．通常，系統裏另外那些變量受着一定條件的限制，這些條件必須包括在最初的準則裏．例如，可以寫出像下面一類合適的準則：

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{t_1}(y-y_s)^2dt=\min\\ \text{當}\quad&\\ &\int_0^{t_1}f(z)dt=\text{const.}\end{aligned}\right\}\tag{14.4}$$

例如，$y$ 代表發動機的速率，$z$ 代表燃氣輪發動機的特性溫度，準則(14.4)限定要求設計出來一種系統，這種系統對於某個特殊的溫度積分值來說，速率誤差的平方對時間的積分取極小值．假設已經知道了在一定時間內所能容許的超溫條件，並且希望在過渡過程裏保持平均速率誤差最小，例如這種情形就可以採用上述的準則． 其中那個包含 $z$ 的積分表示加到燃氣輪發動機葉片上的總熱量．

通過普遍的理論將會證明：可以根據需要而擬定出不論多少像方程(14.1)至(14.4)那種類型的準則，並從而推導出一個能够自動地同時滿足所有這些準則的控制系統．

控制準則的另外一方面是關於方程(14.1)到(14.4)中積分的上限問題． 必須選取這些積分等於極小值或者常數值的時間間隔．一個合理的時間間隔是這樣一段時間：在這段時間內，那些主要外干擾等於常數值，並且控制系統由一個主要運行狀態過渡到另外一個主要運行狀態．主要外干擾是指那種干擾，當系統遭到這種干擾時，不可能即時加以修正．如果在準則成立的時間間隔內有主要外干擾出現，那末根本不可能設計成功一種確實能够實現的系統，它能够預料到這個干擾，以便在干擾發生以前具有適當的性質．所謂一個主要運行狀態僅僅是指那些連續變量的某一個特殊狀態． 關於噴氣發動機的情形，可以用一個一階的微分方程來描寫過渡過程的性能．機器的速率決定了運行狀態．假使必須考慮燃料系統的影響，或者假設溫度的變化不是立刻反應到速率的變化，那末就要同時用機器的速率和加速率來描寫機器的主要狀態．我們立刻就會看到這一切．

無論用那種設計方法得到的控制系統，都必須確實能够實現．這個問題有兩方面，第一，可能給出的是任何系統都不能達到的準則，或者給出互相矛盾的準則．如果採用了上述準則，那末這種不現實性可能有兩種情況，第一種情況是：這種準則也許能作爲將來對控制系統的要求，但是現有的技術是作不到的，第二種情況是這種準則使得某些微分方程的邊界條件得不到滿足．在許多情况下，只要對所採用的準則和控制系統瞭解得很清楚，就能妨止這類矛盾．

關於控制系統確實能够實現的第二方面問題是純粹的數學問題．我們希望把滿足控制準則，並且滿足由這個方程引出來的所有邊界條件的控制系統或被控制系統給以描寫(用一個微分方程來描寫)．雖然問題的數學解答可能是這個微分方程的某種微分或者積分，可是這個問題的物理解答要求自己滿足邊界條件，而且不出現未確定的積分常數．像

這種形式

$$\dot{y} = c\dot{x}$$

和

$$y = cx,$$

用來描寫控制系統的某些部分時,就不一定能把這兩個式子看作是等價的. 因爲這兩種形式有一個未定積分常數的差別. 對於穩定的綫性系統,這個積分常數影響非常小,但是像這裏出現的非綫性系統,我們就必須考慮這個常數的影響.

## 14.2 穩定性問題

穩定性的要求是一種特殊的準則,在過渡過程裏,主要控制系統的設計中,並不考慮這一特殊準則. 這種情況像上一章一樣,因爲系統滿足了那些指定條件,整個系統已經具有合適的性能,用不着考慮穩定性. 但一般說來,必須在系統裏加上一個穩定裝置,這個裝置直到過渡過程結束的時候才發生作用,因此這個穩定裝置將不會影響到系統滿足其它準則. 對於一個一階系統,這個裝置可以描寫如下,當

則

$$\left.\begin{aligned} y &= y_s, \\ \dot{y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{14.5}$$

對於二階系統,當

則

$$\left.\begin{aligned} y &= y_s, \\ \dot{y} = 0 \ &\text{及}\ \ddot{y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14.6}$$

當這樣的一個裝置加到控制系統以後. 控制系統有兩種運行方式,這也就是一個多方式的控制系統(參看 10.9 節). 當過渡過程期間,主要控制系統按照指定的性能運行. 過渡過程終止時,再換到第二個系統進行控制,這時候系統具有方程(14.5)或者(14.6)所描寫的性質,保證系統最後處於穩定狀態,避免系統離開希望到達的運轉點.

## 14.3 一階系統的一般理論

根據前面方程(14.1)到方程(14.4)給出的那一類準則,我們可以按下面的方式把控制方程加以公式化:假設準則是這樣一些準則,要求積分中的一個在其它積分都等於常數的條件下取極小值. 按照變分法原理,上述準則是下面公式成立的充分條件,

$$\int_0^{t_1} f(y)dt + \lambda_1 \int_0^{t_1} (y - y_s)^2 dt + \lambda_2 \int_0^{t_1} f_0(z)dt + \lambda_3 \int_0^{t_1} dt = \min$$

或

$$\int_0^{t_1} [f(y) + \lambda_1(y - y_s)^2 + \lambda_2 f_0(z) + \lambda_3] dt = \min. \tag{14.7}$$

這些 $\lambda$ 是作爲可調整的參數而加到系統裏的任意常數, 參數 $\lambda$ 的具體數值要依據上面那些等於常數值的積分所取的值確定. 在某些約束條件下求極值的一類問題, 廣泛的採用了這種"$\lambda$ 乘子"法. 實際上,並不一定非要積分形式的條件不可,變量之間是泛函數關係

或者微分關係的情形也可以用同樣的方法處理[1]. 當包含着所有可能的約束條件時,方程(14.7)可以變爲非常普遍的方程. 在最後的方程裏, 如果不採用某個準則, 那末相應的 $\lambda \to 0$. 假設某個準則等於零,那末相應的 $\lambda \to \infty$.

如果控制系統是一個常系數一階系統,那末只有一個基本的輸出量 $y$, 變量 $y$ 和 $z$ 間有一定的關係,用 $z = z(y, \dot{y})$表示. 通常方程(14.7)可以寫成

$$\int_0^{t_1} F(y, \dot{y})dt = \min, \tag{14.8}$$

其中 $F$ 是 $y$ 和 $\dot{y}$ 的連續函數, 而 $y$ 是時間 $t$ 的連續函數. 我們注意, 函數 $F$ 不明顯地包含時間變數 $t$.

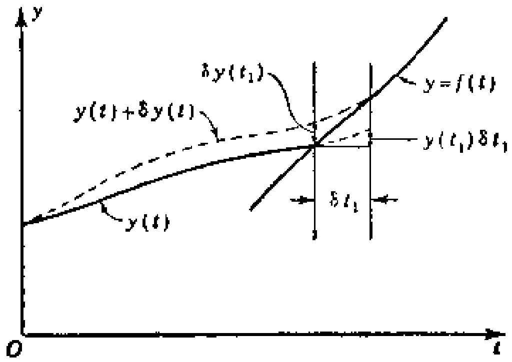



圖 14.1

如果我們認爲$y(t)$是一個解,那就是說, $y(t)$ 是所有可能得到的輸出裏的某個輸出, 它滿足方程(14.8)表示的條件. 我們考慮 $y(t)$附近的一些解 $y(t)+\varepsilon\delta y(t)$,其中$\delta y(t)$是一個任意的函數, $\varepsilon$ 是一個數值很小的參數. 如果 $y(t)$滿足方程(14.8)表示的條件, 那末

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon}\int_0^{t_1+\varepsilon\delta t_1} F(y+\varepsilon\delta y,\ \dot{y}+\varepsilon\delta\dot{y})dt\right]_{\varepsilon=0} = 0$$

或

$$\int_0^{t_1}\frac{\partial F}{\partial y}\ \delta y dt + \int_0^{t_1}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\ \delta\dot{y}dt + F(t_1)\delta t_1 = 0. \tag{14.9}$$

變分 $\delta t_1$ 出現的原因在於: 方程(14.8)裏那個積分的上限並非固定, 而是在圖(14.1)表示的曲綫 $y = f(t)$ 上變動[2]. 這就是前面討論過的從一個主要變量運行狀態過渡到另外一個狀態的邊界條件. 用部分積分法,方程(14.9)變成

$$\int_0^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)\right]\delta y dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_{t_1}\delta y(t_1) - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0\delta y(0) + F(t_1)\delta t_1 = 0.$$

由於末端滿足的條件,很容易計算出 $\delta y(t_1)$ 和 $\delta t_1$ 之間的關係,那就是

$$\dot{y}\delta t_1 + \delta y(t_1) = f'(t_1)\delta t_1.$$

然後把 $\delta y(t_1)$消掉,因爲 $\delta t$ 是任意的,我們得到

$$\int_0^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)\right]\delta y dt = 0 \tag{14.10}$$

以及

$$\delta t_1\left\{F(t_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_{t_1}[f'(t_1) - \dot{y}(t_1)]\right\} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0\delta y(0) = 0. \tag{14.11}$$

1) 例如 C. Lanczos, "The Variational Principles of Mechanics," University of Toronto Press, Toronto, 1946 或參閱[59].

2) 這就是通常稱爲端點不固定的變分問題.

方程(14.8)中，那一段時間間隔，被考慮爲系統從一個主要運行狀態過渡到另一個狀態的時間；在這種情況下，系統變數 $y$ 從一個固定値變化到另一個固定値．那末曲綫 $y = f(t)$ 必須是一條直綫，這條直綫的方程是 $f(t) = \text{const}$，因此

$$\left.\begin{aligned} \delta y(0) &= 0, \\ f'(t_1) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{14.12}$$

於是方程(14.10)和方程(14.11)變成

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) \tag{14.13}$$

以及

$$\text{如果}\ \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0\ \text{是有限數}\ F(t_1) = \dot{y}(t_1)\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_{t_1}. \tag{14.14}$$

因爲 $\delta y(0) = 0$，當 $t = 0$ 時，並不一定要求方程(14.13)成立，唯一的條件是：$t = 0$ 時 $(\partial F/\partial \dot{y})_0$ 是有限數，而且 $y$ 連續變化． 一個新的過渡過程開始時，$\dot{y}$, $F$, $(\partial F/\partial y)$, 和 $(\partial F/\partial \dot{y})$ 可以不連續．因爲方程(14.13)的緣故，在其它點 $(0 < t \leqslant t_1)$，$\partial F/\partial \dot{y}$ 將是連續的．

方程 (14.13) 表示滿足方程 (14.8) 那個條件的變量 $y(t)$ 的微分方程． 通常把方程 (14.13) 叫做變分問題的歐拉–拉格朗日(Euler-Lagrange)方程．這裏所考慮的問題中，函數 $F$ 不明顯地包含時間變數 $t$． 於是我們可以立刻得到方程(14.13)的一個第一積分．方程(14.13)的第一積分中，滿足邊界條件方程(14.14)的第一積分具有下述形式，

$$F(y, \dot{y}) = \dot{y}\,\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}. \tag{14.15}$$

把這個方程對時間 $t$ 微分，我們得到

$$\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} + \ddot{y}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \ddot{y}\,\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} + \dot{y}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right),$$

旣然在那些 $y$, $\partial F/\partial \dot{y}$，等連續的地方，下面公式成立，

$$\dot{y}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)\right] = 0.$$

那末，或者 $\dot{y} = 0$，或者滿足方程(14.13)．但是通常在過渡過程中 $\dot{y}$ 不會等於零(也即無論在任何時間間隔內不恆等於零)，於是由方程(14.13)和(14.14)所描述的 $y(t)$ 的兩個必須滿足的條件，可以用單獨一個方程(14.15)代替．

這樣一來，方程(14.15)描述了實際上可以實現的系統，系統具有下述性質：當外干擾等於常量，系統從一個主要運行狀態過渡到另一狀態這段時間間隔內，系統將會同時自動地滿足那些包含在 $F$ 裏的準則．在過渡過程終了的時候，$y$ 達到終了狀態，這時必須把一個穩定裝置加到系統裏；方程(14.5)就描寫了這樣一個理想裝置．

### 14.4 一般理論對噴氣發動機的控制的應用

關於噴氣發動機控制設計的一般情形，發動機的速率 $N$ 決定發動機的主要運行狀態，它是被控制的量．結果，其它適當的特徵(例如推力)也就決定了． 發動機的限制條件是

關於超速，超溫，壓縮機的浪湧，燃燒室的熄滅等。令 $N_s$ 表示指定的速率，$T$ 表示加到輪機裏的溫度，$P$ 表示壓縮機出口處的壓力，於是可以用下述積分表示發動機的性能準則：

$$\left.\begin{array}{ll}\int_0^{t_1} f_1(N-N_s)dt, & \text{控制速率}\\ \int_0^{t_1} f_2(N)dt, & \text{超速}\\ \int_0^{t_1} f_3(T)dt, & \text{溫度容許的上限和下限}\\ \int_0^{t_1} f_4[P-g(N)]dt, & \text{壓縮機浪湧}\\ \int_0^{t_1} f_5[P-h(N)]dt, & \text{熄滅}\\ \text{以及} & \\ \int_0^{t_1} dt. & \text{升起的時間}\end{array}\right\} \tag{14.16}$$

這些被積函數的性質如圖 14.2 所示，量 $P-g(N)$ 是壓縮機出口處的壓力超出安全壓力而發生浪湧的總量，$g(N)$ 表示對於浪湧以下的安全值，是每一個發動機速率所對應的壓縮機出口處壓力。燃燒室熄滅的情況可以用同樣方式處理。升起的時間是系統從一個主要運行狀態過渡到另一狀態總共需要的時間。

這裏和第 5.6 節談到過的噴氣發動機的情形相似，綫性化以後發動機的特性可以表示如下：

$$\left.\begin{aligned} T &= aN + a\tau\dot{N}, \\ P &= bN + c\dot{T}, \end{aligned}\right\} \tag{14.17}$$

其中 $\tau$ 是發動機的時間常數。將這些關係式代到方程(14.16)的積分裏，我們看到它們全都有下面的形式：

$$\int_0^{t_1} f(N, \dot{N})dt,$$

其中 $f$ 是 $N$ 和 $\dot{N}$ 的連續函數，$N$ 是時間 $t$ 的連續函數。

## 14.5 溫度有一定限制條件的速率控制

當控制速率的時候，如果只把誤差考慮成最重要的因素，準則就變成

$$\int_0^{t_1} f(N-N_s)dt = \min,$$

於是，方程(14.15)的控制條件簡單地給出

$$f_1(N-N_s) = 0.$$

由於 $f_1$ 的性質，$N = N_s$。這個結果表示：在發動機的性能沒有受到其它限制條件的情況下，這種速率控制將保持速率誤差恆等於零。然而只有允許溫度無限升高，才可能實際達到上述要求。這個結果和前面的方程(14.15)前後不一致，在那個方程裏，$N$ 並不是一個時間的不連續的函數。這個例子是一般問題的一種顯然情形。但是這個結果指出必須附

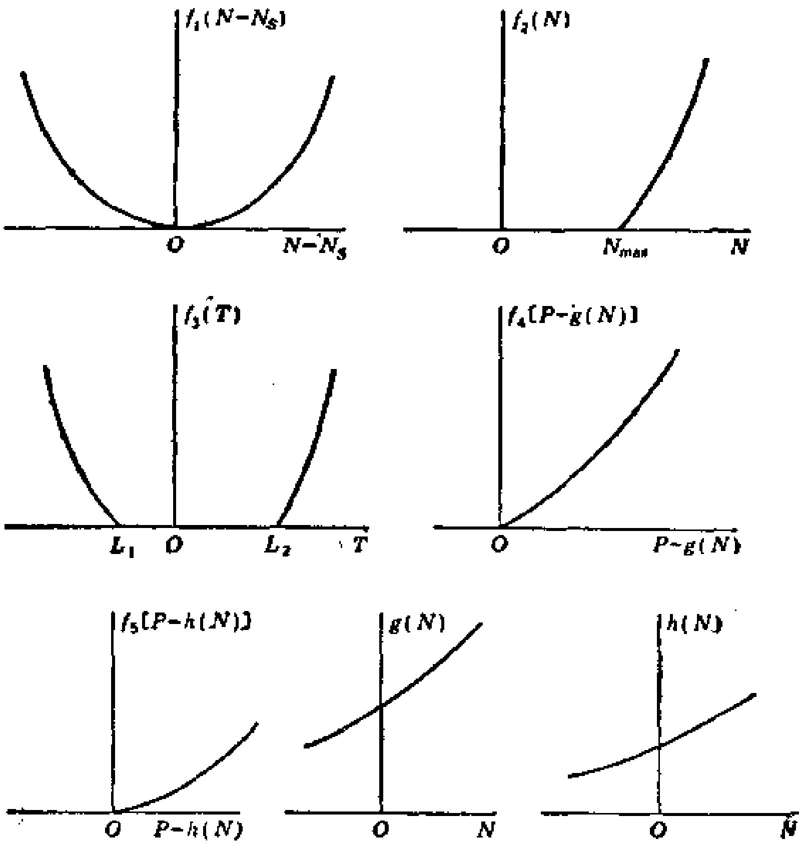



圖 14.2

帶有另外的準則才能給出實際上有意義的系統.

現在假設控制速率的問題中,把誤差和溫度容許的上限和下限合在一起考慮,於是

$$\int_0^{t_1}[f_1(N-N_s)+\lambda f_3(T)]dt=\min, \tag{14.18}$$

所以 $F=f_1(N-N_s)+\lambda f_3(T)$. 由於利用方程(14.17),方程(14.15)變成

$$f_1(N-N_s)+\lambda f_3(T)=\lambda a\tau\dot{N}f_3'(T). \tag{14.19}$$

這是過渡過程的控制方程. 當過渡過程終止時,理想的穩定裝置發生作用,所以當

$$\left.\begin{aligned}N&=N_s\\ \dot{N}&=0.\end{aligned}\right\}\tag{14.20}$$

時,就有

方程(14.19)和(14.20)描寫出整個控制系統的性質. 所以我們可以設想,有一架計算機安裝在系統裏,它由測量機構獲得有關$N$和$T$的資料,貯藏有 $\lambda$, $a$, 和 $\tau$ 的資料,以及燃料速率和 $N$, $T$ 之間的聯系,然後根據方程(14.19),產生適當的燃料噴射率的信號. 當$N$即將到達 $N_s$ 時,穩定機構參與作用,所以過渡過程終止時方程(14.20)自然滿足. 一般說來,控制方程(14.19)是非綫性方程,計算機不可能是綫性元件,不像簡單的電阻電容綫路那樣.

作為一個例子，考慮下述情況，當 $T > L_2$ 時，$f_2(T) = (T - L_2)^n$，當 $T < L_1$ 時，$f_2(T) = (L_1 - T)^n$. 通常，次數 $n$ 必須大於 1，因為如果 $n < 1$，$T$ 可以是無限大，這樣即使積分

$$\int_0^{t_1} f_2(T)dt$$

是有限的，將使 $N$ 不連續，這不符合實際情況。在討論中，令 $n = 2$，並且令 $f_1(N - N_s) = (N - N_s)^2$. 所以我們又以對於給定值所發生的平均平方誤差作為誤差的量度，於是方程(14.19)變成

$$\frac{(N - N_s)^2}{\lambda} + (L - aN)^2 = a^2\tau^2\dot{N}^2, \tag{14.21}$$

在這個式子裏：加速率的情形，或者當 $N < N_s$，

$$\dot{N} > 0, \quad 以及 \quad L = L_2;$$

減速率的情形，或者當 $N > N_s$，

$$\dot{N} < 0, \quad 以及 \quad L = L_1.$$

控制系統的方塊圖用圖 14.3 表示如下：

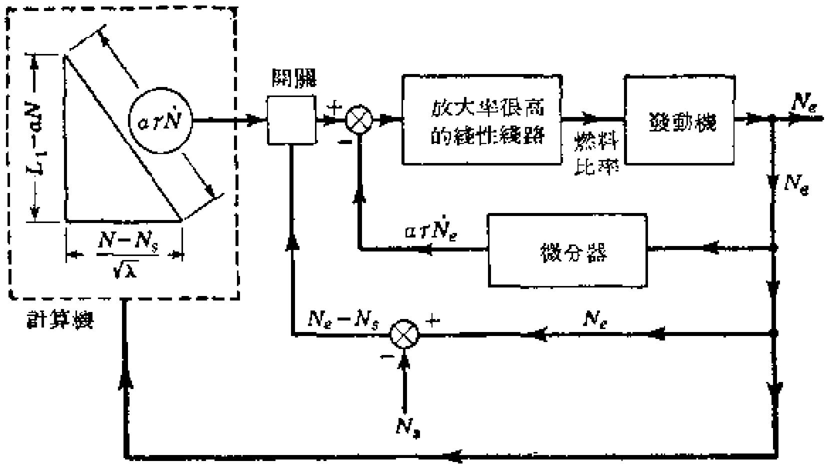



圖 14.3

$N_e$ 是真正的發動機速率，假定我們考慮減速率的情況，$N > N_s$. 在過渡過程中，$N_e - N_s$ 是正的，計算機和發動機伺服系統之間的開關是閉合，從計算機發出的信號起着作用。計算機根據方程(14.21)產生信號 $a\tau\dot{N}$. 在圖 14.3 中用一個直角三角形邊長的關係描寫信號之間的聯系。發動機伺服控制系統要設計得使發動機儘可能服從計算機所發出的信號 $a\tau\dot{N}$. 這只要利用圖中所表示的放大率很高的綫路就可以達到目的。當速率誤差的值變得非常小的時候，計算機就停止發出信號，於是系統的穩定裝置將保證系統保持指定速率 $N_s$，而處於穩定狀態，於是系統滿足方程(14.20)的條件。

控制系統裏有一個可調整的參數 $\lambda$. 對於任意一個給定的 $\lambda$ 和得到的超溫積分來說，這個系統將會使速率誤差平方的積分取極小值。$\lambda$ 的值確定超溫積分的值。我們考慮

$aN_s = L$ 這一特殊情况，那就是，與溫度的限制相適應的加速率或減速率是服從方程(14.17)的．有興趣地注意到，在這個特殊例子裏，根據方程(14.21)的控制條件，當$N=N_s$時，$\dot{N}=0$，所以並不需要一個額外的穩定裝置，圖 14.3 中控制系統裏的開關也就可去掉．在這一特殊情况下，方程(14.21)變成綫性的，可以寫成

$$E(L - aN) = a\tau\dot{N}, \tag{14.24}$$

其中

$$E = \left(1 + \frac{1}{a^2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{14.25}$$

現在那些積分可以很容易的計算出來，例如，溫度積分是

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_1} (T - L)^2 dt &= \int_0^{t_1} (aN - L + a\tau\dot{N})^2 dt \\
&= (E-1)^2 \int_0^{t_1} (L - aN)^2 dt \\
&= a^2(E-1)^2 \int_0^{t_1} (N_s - N)^2 dt \\
&= a^2(E-1)^2 \int_{N_0}^{N_s} (N_s - N)^2 \frac{dN}{\dot{N}} \\
&= a^3\tau(E-1)^2 \int_{N_0}^{N_s} \frac{(N_s - N)^2 dN}{Ea(N_s - N)} \\
&= a^2\tau \frac{(E-1)^2}{E} \frac{1}{2} (N_s - N_0)^2 \\
&= \frac{\tau}{2} \frac{(E-1)^2}{E} (L - aN_0)^2.
\end{aligned}$$

於是得到

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{t_1} \frac{(T - L)^2}{(L - aN_0)^2} dt = \frac{(E-1)^2}{2E}, \tag{14.26}$$

其中 $N_0$ 是過渡過程開始時的發動機速率．同樣，速率積分是

$$\frac{a^2}{\tau} \int_0^{t_1} \left(\frac{N - N_s}{L - aN_0}\right)^2 dt = \frac{1}{2E}, \tag{14.27}$$

假設 $T_{\max}$ 是最高溫度，於是

$$\frac{T_{\max} - L}{L - aN_0} = E - 1. \tag{14.28}$$

從方程(14.24)，我們有

$$Ea(N_s - N) = a\tau \frac{dN}{dt}.$$

在過渡過程中，控制系統的特性時間用 $\tau^*$ 表示，

$$\tau^* = \frac{\tau}{E}. \tag{14.29}$$

這些方程的左端已經化成無量綱的形式了．最高溫度 $T_{\max}$ 是過渡過程開始時的溫度．

當 $E = 1(\lambda = \infty)$，這時候溫度不超出，這與我們前面的敍述相符：當 $\lambda \to \infty$ 時，表示超溫的積分等於零．速率積分等於 0.5，並且 $\tau^* = \tau$．如果 $E$ 增大(或者 $\lambda$ 減小)，溫度積分和最高溫度增大，而速率積分和時間常數減小．可以取 $\sqrt{2}$ 爲 $E$ 的一個折衷值，或者 $\alpha^2\lambda = 1$．只要把 $E$ 或者 $\lambda$ 的值給定，控制計算機的程序也就確定了，於是可以進行控制系統的設計工作．

對於方程(14.21)的普遍情形，積分值計算起來非常麻煩，但是可以採用同樣的步驟設計控制系統．勃克森包姆和胡德給出方程(14.24)眞正的解答，那就是求出 $t$ 的函數 $N$．但是我們在這裏對於控制系統的設計並不着重在求得這種解．控制系統的全部資料由方程(14.24)本身給出，因爲這個方程已經告訴我們應該如何構造控制計算機．如果根據那些條件做出計算機，於是就能保證得到希望的性能．$N$ 對於時間的具體變化情況倒並不重要．因此我們的設計方法與其說是根據假設的方程的解去進行設計，倒不如說是"設計"非綫性方程本身．

### 14.6 兩個自由度的二階系統

對於兩個自由度的常系數二階系統，方程(14.8)變成

$$\int_0^{t_1} F(y, \dot{y}, \ddot{y}, z, \dot{z}, \ddot{z})dt = \min, \tag{14.30}$$

其中 $y$ 和 $z$ 表示輸出，且而對於時間變數 $t$ 來說 $y$ 和 $z$ 是相互無關的兩個函數．使方程(14.30)滿足的條件是，當 $\varepsilon = 0$ 時，

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_0^{t_1+\varepsilon\delta t_1} F(y + \varepsilon\delta y, \dot{y} + \varepsilon\delta\dot{y}, \ddot{y} + \varepsilon\delta\ddot{y},$$
$$z + \varepsilon\delta z, \dot{z} + \varepsilon\delta\dot{z}, \ddot{z} + \varepsilon\delta\ddot{z})dt = 0 \tag{14.31}$$

方程(14.30)中積分的時間間隔由一個固定時刻 $(t = 0)$ 開始，可是不是在某個固定時刻終止，而是終止在曲綫 $y = f_1(t)$，$\dot{y} = f_2(t)$，$z = g_1(t)$，以及 $\dot{z} = g_2(t)$ 上．$\delta y$ 和 $\delta z$ 是任意的函數，自然是時間的互相無關的函數．

我們把方程(14.31)的微分運算寫出來：

$$\int_0^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\partial\ddot{y} + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\delta\dot{z} + \frac{\partial F}{\partial \ddot{z}}\delta\ddot{z}\right]dt + F(t_1)\delta t_1 = 0.$$

經過部分積分以後，我們得到

$$\int_0^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)\right]\delta y dt$$
$$+ \int_0^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{z}}\right)\right]\delta z dt$$
$$+ \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta y + \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\delta\dot{y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)\delta y\right]_0^{t_1} + F(t_1)\delta t_1$$
$$+ \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\delta z + \frac{\partial F}{\partial \ddot{z}}\delta\dot{z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{z}}\right)\delta z\right]_0^{t_1} = 0. \tag{14.32}$$

和前面的討論相類似，積分中被積函數以及邊界條件必須分別都等於零．從給出的終止

條件，我們得到

$$\left.\begin{aligned}\delta y(t_1) &= [f_1'(t_1) - \dot{y}(t_1)]\delta t_1,\\ \delta \dot{y}(t_1) &= [f_2'(t_1) - \ddot{y}(t_1)]\delta t_1,\\ \delta z(t_1) &= [g_1'(t_1) - \dot{z}(t_1)]\delta t_1,\\ \delta \dot{z}(t_1) &= [g_2'(t_1) - \ddot{z}(t_1)]\delta t_1.\end{aligned}\right\} \tag{14.33}$$

從方程(14.32)得到的三個條件可以寫成兩個聯立的歐拉-拉格朗日方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right) = 0,\\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{z}}\right) = 0,\end{aligned}\right\} \tag{14.34}$$

以及

$$\begin{aligned}&\left\{\left[F - \dot{y}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} + \dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right) - \ddot{y}\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}} - \dot{z}\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} + \dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{z}}\right) - \ddot{z}\frac{\partial F}{\partial \ddot{z}}\right]_{t=t_1}\right.\\ &+ f_1'(t_1)\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)\right]_{t=t_1} + f_2'(t_1)\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)_{t=t_1} + g_1'(t_1)\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{z}}\right)\right]_{t=t_1}\\ &\left.+ g_2'(t_1)\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{z}}\right)_{t=t_1}\right\}\delta t_1 + \delta y(0)\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)\right]_{t=0} + \delta \dot{y}(0)\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)_{t=0}\\ &+ \delta z(0)\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{z}}\right)\right]_{t=0} + \delta \dot{z}(0)\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{z}}\right)_{t=0} = 0.\end{aligned} \tag{14.35}$$

方程(14.34)表示兩個微分方程的系統，這個系統滿足方程(14.30)原來給出的準則．這種問題的物理解答必須滿足方程(14.34)，除此以外還要滿足方程(14.35)的那些邊界條件．但是，因爲$F$不明顯地包含變數$t$，這一系列的條件可以加以修改：如果把方程(14.34)中第一個方程乘以$\dot{y}$，第二個方程乘以$\dot{z}$，然後加起來，就得到一個全微分，它的積分就是：

$$F - \dot{y}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} + \dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right) - \ddot{y}\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}} - \dot{z}\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} + \dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{z}}\right) - \ddot{z}\frac{\partial F}{\partial \ddot{z}} = C \tag{14.36}$$

因爲$F$是$\dot{y}$和$\ddot{y}$的一個函數．$\partial F/\partial \dot{y}$和$\partial F/\partial \ddot{y}$未必會等於零，$\partial F/\partial \ddot{y}$也不一定是時間的常數函數，於是$\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)$不一定等於零．所以，我們有理由認爲在方程(14.35)中

$$\delta y(0) = \delta \dot{y}(0) = f_1'(t_1) = f_2'(t_1) = 0.$$

變量$z$也有類似的情形．於是得到一系列邊界條件如下：

$$\left.\begin{aligned}\delta y(0) = 0, \quad f_1'(t_1) = 0,\\ \delta \dot{y}(0) = 0, \quad f_2'(t_1) = 0,\\ \delta z(0) = 0, \quad g_1'(t_1) = 0,\\ \delta \dot{z}(0) = 0, \quad g_2'(t_1) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{14.37}$$

這些邊界條件也是與變量$y$，$\dot{y}$，$z$和$\dot{z}$的起始值和終止值對應的條件，但是過渡過程的時間間隔$t_1$可以變化．由方程(14.37)的邊界條件，方程(14.35)指出方程(14.36)右端的那

個常數$C$必須等於零．方程(14.30)的最後解答如下：

$$F-\dot y\frac{\partial F}{\partial \dot y}+\dot y\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot y}\right)-\ddot y\frac{\partial F}{\partial \ddot y}-\dot z\frac{\partial F}{\partial \dot z}+\dot z\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot z}\right)-\ddot z\frac{\partial F}{\partial \ddot z}=0, \quad (14.38)$$

並且滿足下面兩個方程中的一個：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot y}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot y}\right)=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot z}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot z}\right)=0.\end{aligned}\right\} \quad (14.39)$$

方程(14.38)和(14.39)表示一個系統的兩個變量$y$和$z$的微分方程，它們是控制方程，也是設計計算機所用的方程．

邊界條件(14.37)確定系統由一個主要運行狀態過渡到另一狀態的過渡過程的初始準則．這樣，如果方程(14.37)所表示的條件必須都成立，系統由一組固定的$y, \dot y, z, \dot z$過渡到另一組固定的$y, \dot y, z, \dot z$．方程(14.38)是一個三階微分方程．方程(14.39)是一個四階微分方程．於是除了$y, \dot y, z$和$\dot z$的四個初始值而外，還可以假設一組與最後的$y$相應的三個值$\dot y, z$，和$\dot z$，那就是，當$y=y_s$時；$\dot y=0$，$z=z_s$，以及$\dot z=0$．還必須在系統裏加入一個穩定裝置，使得在終止點，滿足

$$\ddot y=0 \quad 以及 \quad \ddot z=0.$$

我們看到，雖然上述情況比前面討論過的一階系統更爲複雜，但是完全可以用同樣的辦法處理．

## 14.7 以微分方程作爲附加條件的控制設計

用$y$表示被控制的主要變量，$z$是另一個變量，我們把它加到系統裏用來保證$y$能夠具有所需要的性能(例如，$y$表示發動機的速率，$z$是決定進入燃燒室的燃料的爐門的坐標)，系統固有的動力學特性給出一個$y$和$z$之間的關係式，一般說來，這種關係是一個非綫性微分方程，比如說，是一個二階微分方程

$$g(y, \dot y, \ddot y; z, \dot z, \ddot z; t)=0. \quad (14.40)$$

比如說，在過渡過程中$y$的性能規定成，

$$\int_0^{t_1} f(y)dt=\min, \quad (14.41)$$

方程(14.2)的誤差積分，就可以當作這種類型的例子．這裏問題在於求出同時滿足方程(14.40)和(14.41)的控制方程．

數學上的問題就是一個以方程(14.40)作爲約束條件的變分問題，這類問題仍然可以利用歐拉-拉格朗日乘子$\lambda(t)$[1)]的方法解决．那就是

$$\int_0^{t_1} F(y, \dot y, \ddot y; z, \dot z, \ddot z; t)dt=\min, \quad (14.42)$$

1) 例如參看 O. Bolza, "Vorlesungen über Variationsrechnung" Teubner, 1909 (第十一章) 或[59](第五章).

其中

$$F = f(y) + \lambda(t)g(y, \dot{y}, \ddot{y}; z, \dot{z}, \ddot{z}; t). \tag{14.43}$$

這裏和從前不同的地方在於引入了一個隨時間變化的乘子 $\lambda(t)$. 方程(14.42)的問題完全和方程(14.30)相同. 所以前面一節推導出來的那些方程全部可以採用. 但是,現在有三個未知數: $y$, $z$ 和 $\lambda$,它們由方程(14.34), (14.40), 以及滿足方程(14.32)的 $F$ 所確定. 方程(14.40)表示物理系統的內在聯系,控制系統會自動地滿足這個關係. 然而方程(14.34)就需要人爲地加以處理才能得到滿足. 這時兩個方程所組成的那個方程組就成爲控制計算機的運轉狀態的根據. 安裝得合適的控制計算機由主要輸出 $y$ 取得資料,經過加工,然後產生一個連續的控制信號 $z$. 當這個信號 $z$ 加到控制系統裏以後,就迫使系統按照(14.41)所規定的性質運轉.

## 14.8 控制設計概念的比較

上一章及本章內, 我們已經討論了當控制系統的性能規定得十分確切情况時的設計方法. 上一章的方法,以攝動法爲基礎,適用於變系數綫性系統, 這一章所用的方法具有更一般的性質,甚至於控制系統本身可以是非綫性的. 對於這種一般的系統,這些新方法是設計控制系統唯一有效的工具; 這樣設計出來的包含有計算機的複雜的控制系統似乎是唯一合理的解決辦法. 但是,這一章和前一章的方法也同樣適用於以前各章所處理過的比較簡單的物理系統, 也就是常系數綫性系統. 因此,對於比較簡單的系統的控制問題,我們就有兩種不同的處理方法. 現在把這兩種設計概念加以比較.

在第五章,採用了一般伺服控制原理處理過發動機控制問題. 在這一章中,我們又採用了滿足指定的積分條件的控制設計這種比較新的方法; 我們討論了這樣幾乎相同的問題以後,下列事實立刻就可以明白了:用老方法設計的控制系統是綫性系統, 元件可以是簡單的電阻電容綫路; 可是用新方法設計的系統是非綫性的,主要的控制裝置是計算機,即使最簡單的計算機也比電阻電容綫路複雜得多. 但是這種複雜化不是沒有好處的:以一般伺服控制原理爲基礎的控制系統,在性能上, 雖然也可以完全適合; 然而包含有非綫性計算機的控制系統能够保證給出最優的性能——在同樣設計條件下沒有其它的控制系統比它更好. 但是只有當我們知道了所需要的性能時這種比較才有意義. 例如,假設我們不知道方程 (14.18) 的溫度積分究竟是什麽, 我們就不能用所有這一章討論過的方法. 另外一方面, 根據老的伺服控制設計概念設計一個合適的系統並不需要把條件敍述得這樣嚴格.

自然,必須對最好的控制行爲到底包含什麽內容有了清楚的了解以後,才能提出關於最好的性能的確切要求. 所以,當我們想得到一個最優的控制系統時,我們當然要掌握確定嚴格的控制準則的資料. 由這個觀點來看,最後這兩章滿足指定控制性能的這種比較新的原則,比一般伺服控制理論當然是邁進了一步,這種新原則是更爲先進的控制設計原則. 比較先進的控制系統也應該比較複雜,這也是可以預先想到的.

# 第十五章

# 自動尋求最優運轉點的控制系統

在以前各章中，我們所討論的各種控制系統，在普遍性和複雜性上都是逐漸增加的．可是自始至終有一個基本假設：假設已經知道了被控制的系統所具有的性質和特徵．普通綫性伺服控制系統的情形，伺服機構以及其它元件的傳遞函數在設計前已經確定．至於變系數綫性系統的情形，我們舉出長距離火箭的導航系統爲例子，那裏，在設計以前，火箭的動力學特性和空氣動力學性質就已經確定了．上一章所處理過根據指定積分條件進行設計的一般控制系統中，系統對於被控制的輸入變化的反應也假定是預先確定了的，控制系統的設計工作是以系統的這些知識爲依據．反饋作用僅僅是把輸出處的資料傳送到計算機裏，然後計算機就根據它所有的關於系統性質的知識發出"明智的"控制信號．

在這一章裏，我們甚至於希望把這個對於控制設計似乎是起碼的要求還進一步放寬，我們將引入連續"理解"和連續測量的控制設計原理．根據這種原理，進行控制設計時就不需要有關控制系統性質的確切知識，在這裏我們採用在控制過程中不斷測量的辦法來代替預先瞭解控制性質的要求，這種系統就稱爲自動尋求最優運轉點的控制系統(以下簡稱自尋最優點系統)．我們下面將特別地討論關於這種控制系統的一個簡單例子．

## 15.1 基本概念

無論我們從控制計算機中得到的信號是多麼準確，一個控制系統性能的精確程度總是與設計所依據的數據的精確程度有關．假設像前面各章那樣我們默認：在瞭解控制系統的整個設計之前，我們已經確定了控制系統的性質，那末由於以下兩點理由我們不可能獲得非常精確的控制性能：第一，原來假定的對象在製造過程中常常會發生微小的差異．例如，火箭模型的機翼的性能是依靠在風洞中進行實驗所測定，然而，真正的火箭機翼的性能和模型機翼的性能就不會完全相同，所以火箭的空氣動力學特性實際上和實驗結果有些不同．第二，任何一個工程系統都會在時間過程中發生一些變化，這種變化可能是由於磨損和疲勞而使系統逐漸損壞，也可能是由於系統所處的周圍環境有所改變的緣故．簡言之，在系統實際進行運轉之前永遠不可能絲毫不差地知道一個工程系統的性質．因此，如果要求系統具有高度精確的控制性能，我們就必須採用連續理解的控制原理．

希望控制設計能够非常精確，這個要求也並不是改變控制概念的唯一原因；實際上，常常會發生這種情況：系統的性質會發生某些預料不到的巨大變化，因而使得我們非採用連續理解的控制原理不可．在處理長距離火箭導航問題時，考慮空氣擾動的影響時我們已經引進了這個原理；在那裏，我們利用火箭的動力學狀態本身作爲連續測量那些影響的測量儀器．此外飛機在結冰的氣候條件下飛行是一個更明顯的例子．在機翼和機身表面上冰層的堆積和溶化會使飛機的外形有一些改變．而且，冰塊的堆積方式就是無法預先

精確測定的那種變量，所以由於冰塊的影響飛機的空氣動力學特性會發生相當大的變化，而且這種變化方式無法預料到，更不幸的是：所有這些變化總是使飛機的性能降低，也就是說，每加侖汽油所能飛行的哩數一定減少．所以，我們的興趣在於：設法瞭解發動機的功率，發動機每分鐘旋轉次數，以及飛機的飛行情況應該如何配合起來才會使每加侖汽油得到最大的哩數．因爲我們應該使飛機在最優狀態下飛行，儘量少消耗那不多的燃料，可是就在這種危急情況下，由於結冰的作用，我們原先關於飛機性能的瞭解和實際情况却又不相符合了，因此，在這種不利的情勢之下，只有一個解決這種飛行控制問題的辦法，這就是採用自動理解和測量的控制系統，也就是自尋最優點系統．這種系統自動地使飛機保持最優的運轉條件．

一個熟練的工作人員自然而然的採用尋求最優的原理控制機器的運轉．他隨時注意機器的輸入和輸出的儀表讀數，然後根據他的知識和經驗來斷定需要向哪一個方向調節，把輸入調節以後，輸出讀數也就改變了，根據這個新的輸出讀數他又來判斷是否到達或者超過最優運轉條件，然後再進行輸入的調節．連續調節輸入是"理解"的過程，唸出輸出的讀數是反饋過程．然而，人工控制的辦法只有系統反應緩慢的情况下才能成功，但是對於複雜的系統，用人工直接來控制的辦法無論動作得怎樣好都不容易得到合乎理想的效果．自尋最優點的控制是由椎柏(C. S. Draper)李耀滋(Y. T. Li)和拉寧(H. Laning, Jr.)[1]提出的，舒爾(J. R. Shull)[2]曾經討論過這種原理在操縱飛機方面的應用．

## 15.2　自動尋求最優點控制的原理

自尋最優點控制系統的重要部分是一個非綫性環節，通過這個環節來確定相應的最優運轉條件．爲了討論起來簡單起見，我們假設這個基本元件只有一個輸入和一個輸出．

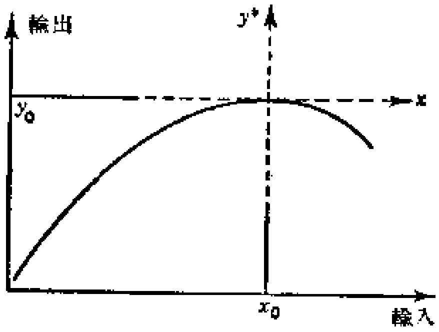



圖 15.1

在現階段，我們將忽略時滯的影響，假設輸出僅僅由於輸入的瞬時值所决定．因爲系統有一個最優的運轉點，作爲輸入的函數，這個輸出函數在 $x_0$ 的地方有一個極大值 $y_0$，如圖 15.1．通常輸出和輸入的關係以最優點作爲參考點，於是 $x+x_0$ 是系統的輸入，$y^*+y_0$ 是輸出，最優點就是 $x=y^*=0$．自動尋求最優點系統的目的在於找到這個最優點，使系統保持在這一點附近運轉．在這一點附近 $x$ 和 $y^*$ 之間的關係可以近似地表成

$$y^* = -kx^2. \tag{15.1}$$

在概念方面，關於得到一個自尋最優點系統的方法，可以敍述如下：假設我們開始有一個負的輸入，也就是比最優輸入的值要小一些的輸入，像圖 15.2(a)所表示那樣，我們以

1) Y. T. Li (李耀滋), *Instruments*, **25**, 72-77, 190-193, 228, 324-327, 350-352 (1952). C. S. Draper and Y. T. Li, "Principles of Optimalizing Control Systems and an Application to Internal Combustion Engine," *ASME* Publications (1951).

2) J. R. Shull, *Trans IRE* (Electronic Computers), December, 1952, pp. 47—51.

速率等於常數的方式使輸入增加，相應的輸出 $y^*$ 首先將會增加，逐漸到達最優值，然後開始減少，如圖 15.2(b)．$y^*$ 對於時間的微商，$dy^*/dt$，首先是正的，在 1 那一點降到零（圖 15.2(c)），以後就變成負的．在 2 那一點，$dy^*/dt$ 的值達到系統中設計時確定的臨界值，於是輸入變化的方向就反轉過來．現在的輸入 $x$ 開始減少，它下降的速率和以前增加時的常數速率相等．現在 $y^*$ 又增加了，$dy^*/dt$ 跳到正的值．在 3 那一點，輸出達到了它的極大值，於是 $dy^*/dt$ 又變成零．在 4 那一點，$dy^*/dt$ 又到達臨界值，使輸入再改變它的方向．系統自己重複地進行這種過程，而且這種狀態是有周期性的，這時，我們說系統圍繞着最優點進行搜索；周期 $T^*$ 叫做**搜索周期**，輸出的最小值 $\Delta^*$ 叫做輸出 $y^*$ 的**搜索範圍**．

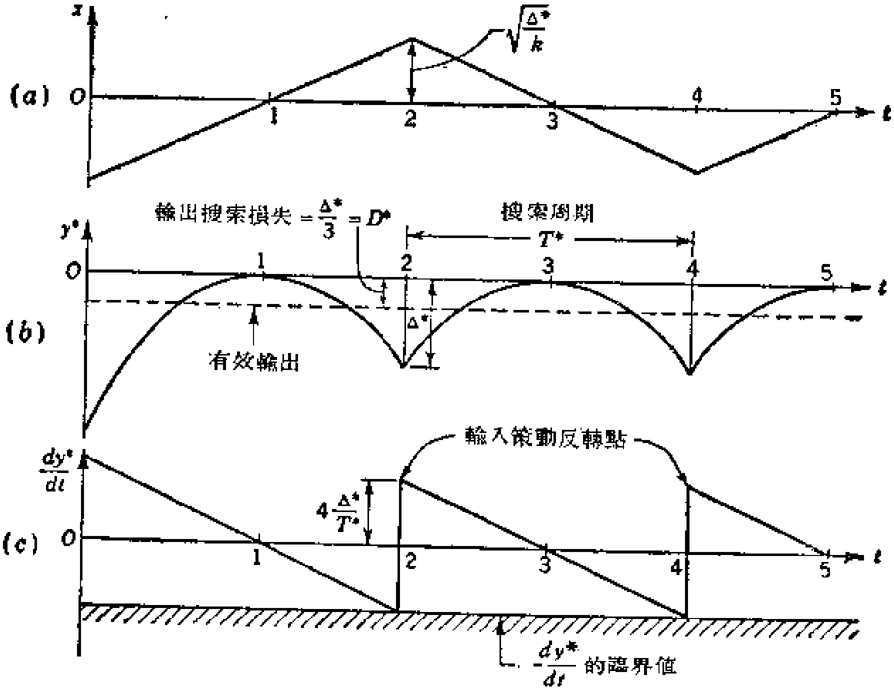



圖　15.2

因爲方程(15.1)表示輸入和輸出是拋物綫關係，輸出的平均值等於 $\frac{1}{3}\Delta^*$，比最優輸出小，這個差別 $D^*$ 是一種損失，$D^*$ 稱爲**搜索損失**，這是爲了把控制系統保持在最優點附近而付出的代價．我們知道

$$D^* = \frac{1}{3}\Delta^*. \tag{15.2}$$

系統的其它特徵數量可以用 $\Delta^*$ 和 $T^*$ 來進行計算：利用方程(15.1)，輸入的極值等於 $\pm\sqrt{\Delta^*/k}$．輸入的變化速率等於 $2\sqrt{\Delta^*/k}/T^*$．輸出的變化速率的臨界值是 $-4\Delta^*/T^*$．所以，假設我們把搜索範圍 $\Delta^*$（或者搜索損失 $D^*$），以及搜索周期 $T^*$ 確定下來以後，系統就確定了．這種自尋最優點系統的主要部份是輸入的試探變化、測量輸出的裝置、對輸出求微商的裝置、以及 $dy^*/dt$ 達到預先規定的臨界數值時使輸入反轉方向的開關裝置．理解和找到最優點的這種作用是由於强制輸入變化而實現．但是輸入一直在變化也使得

輸出有微小的損失 $D$. 我們希望搜索範圍 $\Delta^*$ 比較小,但是如果 $\Delta^*$ 小, 那末決定輸入變化反轉方向的 $dy^*/dt$ 的臨界值也就減小. 由於系統中難免有干擾或者噪聲出現,於是就增加了發生意外的輸入反向的危險性. 假設系統運轉離開了最優點,很明顯,再找到最優運轉點的時間和搜索周期 $T^*$ 成正比. 確切的說, $T^*$ 越大,這個時間也就越長. 在非綫性系統裏的這種關係是單調的, 但不是綫性的; 當 $T^*$ 小的時候這種關係大致是綫性的關係. 這樣看來,希望搜索周期短一些. 但是如果 $T^*$ 太小,那麼在搜索運轉中就很難把輸出信號和其它隨機干擾區分開來. 關於這一點我們將在下一節裏再加以討論.

系統中試探輸入變化可以是一個光滑的時間函數而不是圖 15.2(a) 那種齒形曲綫. 例如,我們可以使輸入 $x$ 由一個變化緩慢的量 $x_a$ 和一個正弦函數組合而成, 這個正弦函數的振幅是常數 $a$, 頻率是 $\omega$ ,這樣

$$x = x_a + a\sin\omega t. \tag{15.3}$$

於是,根據方程(15.1),相應的輸出 $y^*$ 是

$$y^* = -k\left(x_a^2 + \frac{a^2}{2}\right) - 2kx_a a\sin\omega t + \frac{ka^2}{2}\cos(2\omega t). \tag{15.4}$$

把輸出信號加到一個通頻帶濾波器上, 可以消除變化緩慢的第一項和第三項的雙調和部分. 過濾後留下的信號是 $-2kx_a a\sin\omega t$, 然後通過一個整流相乘器,把這個信號乘以正弦信號 $a\sin\omega t$, 得到

$$-2kx_a a^2\sin^2\omega t = -kx_a a^2[1-\cos(2\omega t)], \tag{15.5}$$

然後再濾掉雙調和項,於是最後我們得到信號 $-ka^2x_a$. 這個信號可以用來改變輸入的分量 $x_a$, 使得下列方程滿足

$$\alpha\frac{dx_a}{dt} = -ka^2x_a. \tag{15.6}$$

於是 $x_a$ 趨於零,它衰減的時間常數等於 $2T^*$,

$$2T^* = \frac{\alpha}{ka^2}, \tag{15.7}$$

因爲輸入和輸出之間是拋物綫關係,輸出衰減的時間常數等於 $T^*$. 所以這樣一種控制系統也會找到最優點而漸近地接近最優點. 這種具有連續試探信號的自尋最優點系統,它的運轉情況表示在圖 15.3 上. 圖 15.3(c) 表示過濾後的輸出信號. 圖 15.3(d) 表示整流相乘器的影響.

當系統運轉接近最優點時,因爲輸入有一個正弦振動,輸出是 $-ka^2\sin^2\omega t$, 所以仍然有輸出損失 $D^* = ka^2/2$. 爲了損失較小,試探輸入的振幅必須相當小,但是由於要考慮系統中干擾和噪聲的影響, 又有一定的限制, 振幅不可能太小. 這裏輸出的搜索範圍 $\Delta^*$ 等於 $ka^2$, 我們得到關係式

$$D^* = \frac{1}{2}\Delta^*. \tag{15.8}$$

方程(15.7)指出與輸入策動信號有關的設計參數 $\alpha$ 根據下面關係式由 $D^*$ 和時間常數 $T^*$

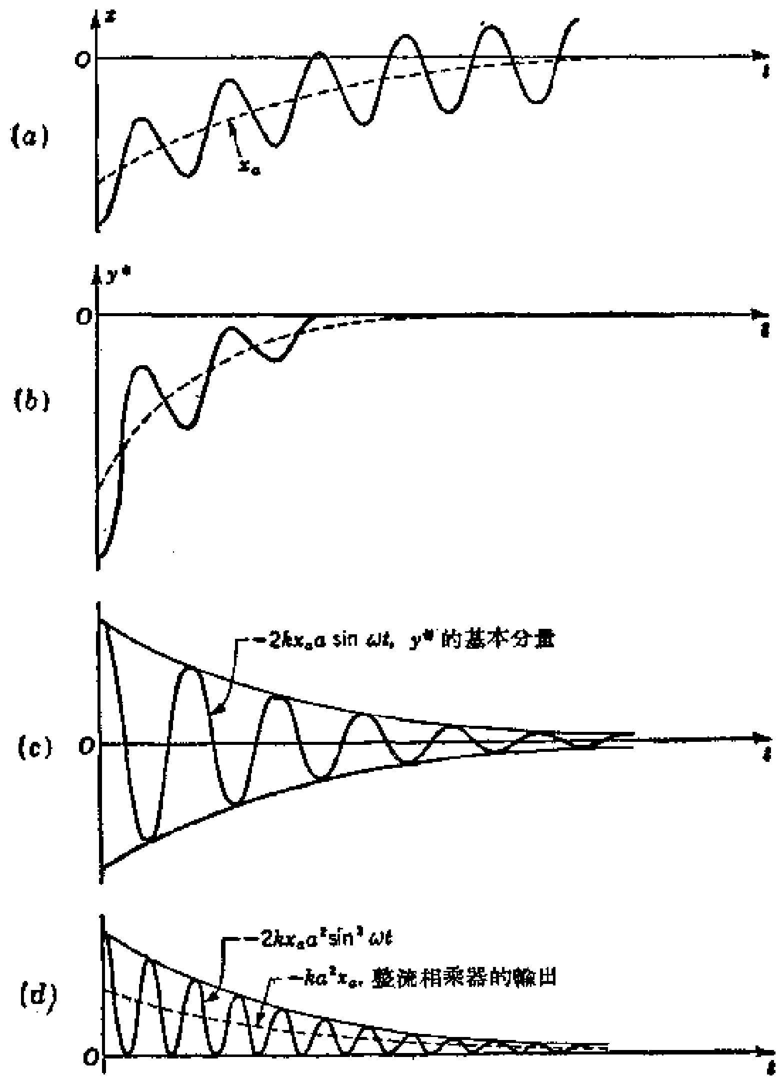



圖 15.3

決定

$$\alpha = 4D^*T^* = 2\Delta^*T^*. \tag{15.9}$$

由方程(15.3)試探輸入，得到的信號[方程(15.5)]的整流部分 $-ka^2x_a$，與實地表示輸入信號對最優輸入的偏差的一個量度。根據方程(15.6)來連續策動輸入信號的辦法，只是很多種可能採用辦法中的一種辦法。顯然，也可以用這個信號給出一個按照齒形變化的輸入並且加上一個正弦振動，當信號 $|-ka^2x_a|$ 達到臨界值，就反轉輸入的方向。這個自尋最優點系統的搜索運轉過程包含兩個不同的頻率：一個是低頻分量 $x_a$，另外一個是由正弦輸入振盪產生的高頻分量。

## 15.3 干擾的影響

以前關於理想化的自尋最優點控制系統的討論已經表明：盡量減小試探輸入變化的振幅以及減小時間常數 $T^*$ 是有重要意義的。然而，由於物理系統中普遍存在噪聲和干

擾，因此在實際的設計上就有一些限制． 為了有效地測量由於為了探測到最優點的距離而加的輸入變化而得到的輸出變化，那末隨時間變化的輸出信號的這一部分頻率分量，應該能够與由於噪聲和干擾而產生的輸出部分區分開來．由於干擾而產生的輸出的頻率分量的相對振幅可以畫成一個以頻率為變數的函數圖綫．這種干擾輸出的頻率譜通常像圖 15.4 所畫的那樣：有一個低頻部分（飄移干擾），以及一個高頻部分．在這兩部分中間，通

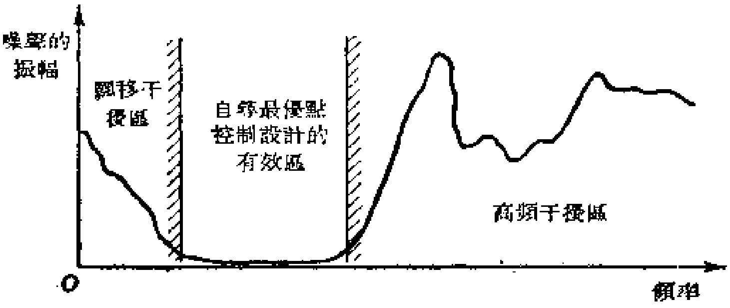



圖　15.4

常有一個噪聲影響較小的頻率區域．如果設計自尋最優點系統時，使試探輸入變化的頻率在這個區域內，那末試探輸入的振幅可以很小，不致被干擾影響掩蔽而喪失了作用．於是，一般情况下，輸入變化中試探函數必須使輸入變化得足够快以避免飄移干擾的影響，同時為了妨止雜亂的高頻噪聲，變化又不能過份快．

關於噪聲影響的這些考慮，指出前面討論過那兩類自尋最優點系統的困難所在． 第一類系統具有齒形輸入，它們採用輸出對時間的微商作為控制信號． 假設輸出中有隨機干擾，由於採用輸出對時間的微商，於是高頻分量的相對振幅將會有所增加，那末就減小了自尋最優點系統的有效頻率區域． 這是一個嚴重的缺點． 第二類自尋最優點系統，採用光滑的正弦試探函數，要求噪聲影響小的頻帶相當寬，因為除了輸入中 $x_a$ 的變化而外，還有一個頻率相當高的正弦變化．所以，如果控制系統只有噪聲影響小的頻帶相當狹窄，以上討論過的這兩類自尋最優點系統都是不適用的． 在下一節，我們將討論另一種比較好的系統，那種系統叫做自動保持最高點的控制系統．

## 15.4　自動保持最高點的控制系統

自動保持最高點控制系統的輸入變化情形和這裏研究過的第一類自尋最優點系統相同，也是速率等於常數的周期變化． 這裏主要的區別在於產生反轉輸入信號方向的方法有所改進：當輸出達到它的極大值以後逐漸下降接近於限制的搜索範圍時就反轉輸入信號的方向．現在就用這個事實本身作為策動這種自動保持最高點控制系統輸入信號反轉方向的條件．可以用下述辦法實現這個條件：用一個電壓量度輸出 $y^*$． 這個電壓稱為輸出的指示電壓，這個電壓經過一個只會充電而不能放電的閥門通到一個電容器上．所以，在 $y^*$ 達到最大值以前，電容器的電壓，數值和表示 $y^*$ 的電壓相同．當輸入增加超過最優值時，輸出 $y^*$ 逐漸下降，但是電容器的電壓將仍然保持那個極大值，於是電容器的電壓和輸出的指示電壓之間，有一個電壓差 $v$．這個電壓差所容許的最大值由搜索範圍 $\Delta^*$ 決定．當 $v$ 達到 $\Delta^*$ 時，安裝在系統裏的一個開關發生作用，反轉輸入信號的方向，在同一時刻，

電容器放電,使它的電壓等於輸出的指示電壓 $y^*$. 關於這類自尋最優點控制系統的運轉情況,可以用圖 15.5 表示出來。

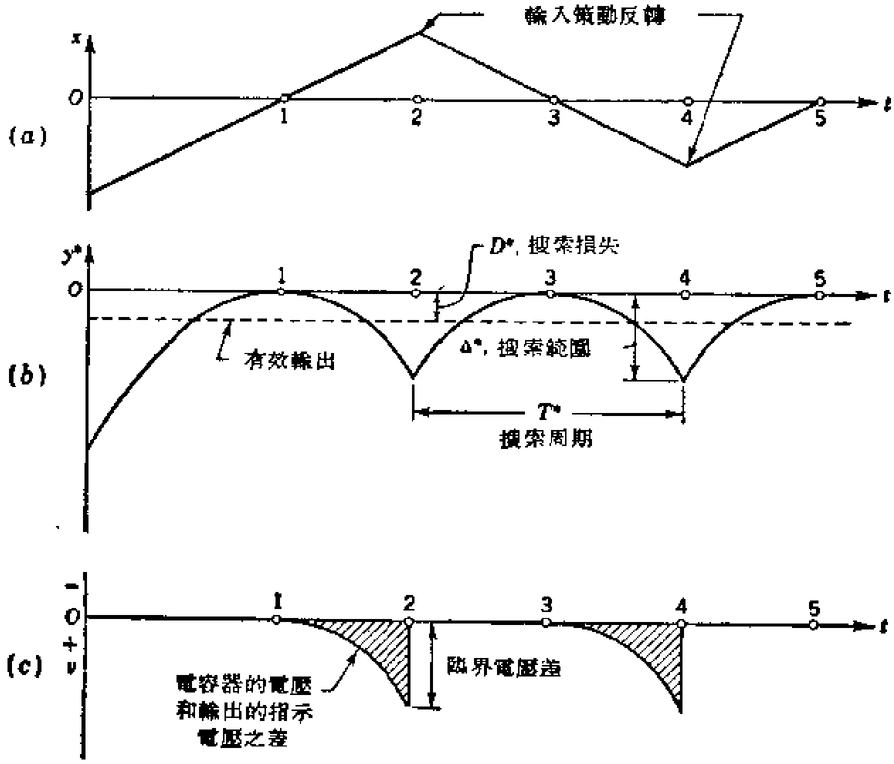



圖 15.5

搜索範圍 $\Delta^*$ 和搜索損失 $D^*$ 之間的關係,也像方程(15.2)給出那樣. 輸入的極值仍然等於 $\pm\sqrt{\Delta^*/k}$,輸入的速率還是 $2\sqrt{\Delta^*/k}/T^*$. 可以看出,自動保持最高點控制系統的輸出只有一個基本頻率,這個頻率由搜索周期 $T^*$ 決定,而不採用輸出的微商. 這種方法特別適用於噪聲影響小的頻率區域比較狹窄的系統. 事實上,這方面有更好的改善辦法,不直接利用電容器的電壓和輸出指示電壓 $y^*$ 之間的電壓差 $v$ 決定反轉輸入信號的方向,而採用 $v$ 對於時間的積分. 於是可以制止高頻干擾的影響,那末搜索範圍和搜索損失可以減小而不致於發生輸入信號出入意料而反轉方向的情形.

## 15.5 動力學現象的影響

前面幾節的討論中,我們已經假定輸入與輸出之間的關係是方程(15.1)確定的拋物綫關係,並且與輸入的速率或者輸入對時間的高級微商無關. 實際上只有在輸出對輸入的反應是瞬時的,根本沒有時滯的情形下,這個假設才正確. 但是在任何一個物理系統中,這個假設都是不可能嚴格地被滿足,事實上,總是有慣性或者其它動力學現象的影響. 於是我們把方程(15.1)給出的輸出 $y^*$ 作爲虛構地"可能輸出"而不是由指示輸出的儀表上真正量得的輸出 $y$. 只有當自尋最優點系統的時間常數 $T^*$ 無限增大時, $y^*$ 才和 $y$ 相等. $y^*$ 與 $y$ 的關係決定於動力學現象的影響. 但是我們已經看到,可以相當準確地用一

個綫性系統近似的描述這種影響. 假設把自尋最優點控制原理用到一個內燃發動機上，如同椎拍和李耀滋所做過的那樣，可能輸出基本上是儀表上指示的發動機的平均有效壓力，而眞正的輸出是發動機的實際平均有效壓力. 這裏，動力學現象的影響主要是由於發動機的活塞，曲柄軸，以及其它會移動部分的慣性影響所產生的. 如果發動機的運轉條件變化得很小，這種影響可以通過一個常係數綫性微分方程來表示. 由於指定輸入和輸出以最優輸入 $x_o$ 以及最優輸出 $y_o$ 爲參考點. 這樣，實際上的可能輸出 $y^* + y_o$ 與實際上由儀表指出的輸出 $y + y_o$ 之間可以寫成一個運算子形式的方程

$$(y + y_o) = F_o\left(\frac{d}{dt}\right)(y^* + y_o),$$

其中 $F_o$ 通常是運算子 $d/dt$ 的兩個多項式相除的有理分式. 採用拉氏轉換的說法，$F_o(s)$ 是傳遞函數. 這個綫性系統把可能輸出轉變爲用來控制輸入變化的指示輸出. 我們把這一部分綫性系統叫做自尋最優點系統的**輸出綫性部分**. 所以 $F_o(s)$ 是輸出綫性部分的傳遞函數，但是忽略動力學現象影響時，或者當 $s = 0$，可能輸出就等於指示輸出. 所以下面公式成立

$$F_o(0) = 1. \tag{15.10}$$

因爲 $y_o$ 是一個常數，所以可能輸出和指示輸出之間的運算子方程可以化簡成

$$y = F_o\left(\frac{d}{dt}\right)y^*. \tag{15.11}$$

與上述情況相類似，我們可以引入一個"可能輸入" $x^*$，這是自尋最優點系統中實際產生的驅動函數，而不是眞正地輸入 $x$. $x$ 和 $x^*$ 兩者之間的關係是由輸入策動系統中慣性以及其它動力學影響所決定. 我們把這個輸入策動系統叫做自尋最優點系統的**輸入綫性部分**. 可能輸入 $x^*$ 和眞正輸入 $x$ 之間有下面運算子方程的關係

$$x = F_i\left(\frac{d}{dt}\right)x^*, \tag{15.12}$$

$F_i(s)$ 就是輸入綫性部分的傳遞函數. 與方程(15.10)相類似，我們有

$$F_i(0) = 1. \tag{15.13}$$

於是，整個自尋最優點系統的方塊圖可以畫成圖 15.6 那樣. 系統中非綫性元件是最優輸入策動機構以及系統本身.

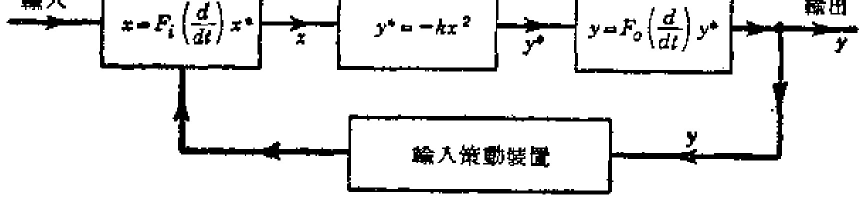



圖 15.6

輸入 $x$ 和輸出 $y$ 之間的關係是由方程(15.1)，(15.11)，(15.12) 以及某種特定類型的

最優輸入策動機構所決定． 例如，假設最優輸入策動機構是前面一節討論過的自動保持最高點那一種類型，於是可能輸入 $x^*$ 是周期等於 $2T$，振幅等於 $a$ 的齒形波，如圖 15.7(a)．

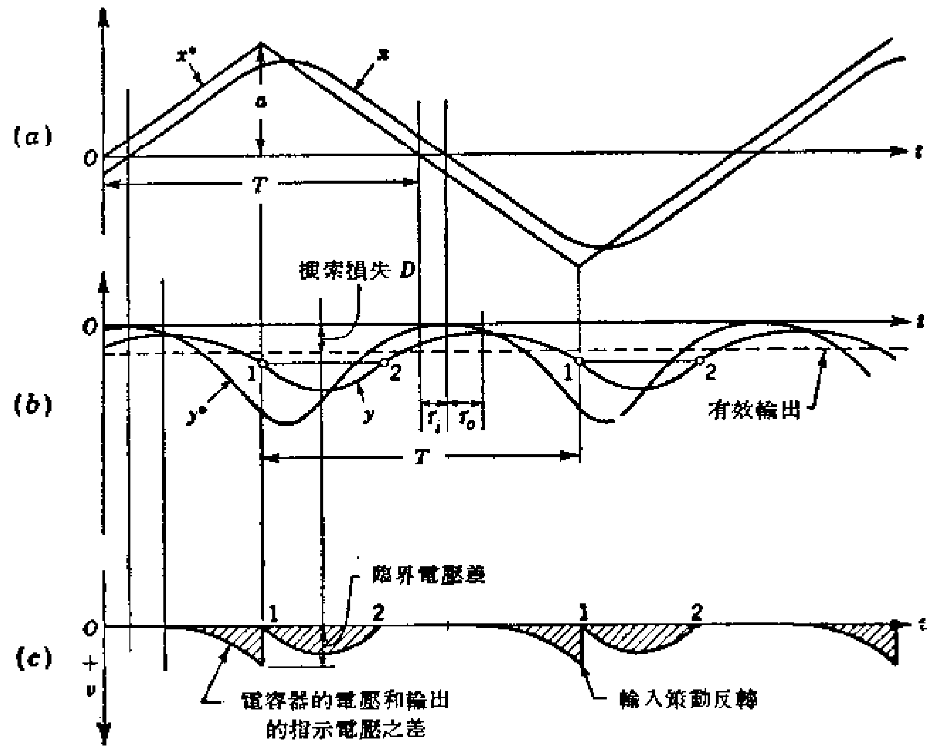



圖 15.7

令

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \tag{15.14}$$

$x^*$ 可以展開成富氏級數如下：

$$x^* = \frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}\sin\left[2(n+1)\frac{\omega_0 t}{2}\right]$$

$$= \frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}\,\frac{1}{2i}\left[e^{\frac{2n+1}{2}i\omega_0 t} - e^{-\frac{2n+1}{2}i\omega_0 t}\right]. \tag{15.15}$$

根據方程(2.16)那個關係式，由方程(15.12)所表示的真正輸入 $x$，可以計算如下：

$$x = \frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2i(2n+1)^2}\left[F_i\left(\frac{2n+1}{2}i\omega_0\right)e^{\frac{2n+1}{2}i\omega_0 t}\right.$$

$$\left.- F_i\left(-\frac{2n+1}{2}i\omega_0\right)e^{-\frac{2n+1}{2}i\omega_0 t}\right]. \tag{15.16}$$

可能輸出 $y^*$ 由方程(15.1)給出．利用方程(15.16)，我們得到

$$y^* = \frac{16a^2k}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)^2(2m+1)^2}$$

$$\cdot\left[F_i\left(\frac{2n+1}{2}i\omega_0\right)F_i\left(\frac{2m+1}{2}i\omega_0\right)e^{(n+m+1)i\omega_0 t}\right.$$

$$-F_i\left(\frac{2n+1}{2}i\omega_0\right)F_i\left(-\frac{2m+1}{2}i\omega_0\right)e^{(n-m)i\omega_0 t}$$

$$-F_i\left(-\frac{2n+1}{2}i\omega_0\right)F_i\left(\frac{2m+1}{2}i\omega_0\right)e^{-(n-m)i\omega_0 t}$$

$$\left.+F_i\left(-\frac{2n+1}{2}i\omega_0\right)F_i\left(-\frac{2m+1}{2}i\omega_0\right)e^{-(n+m+1)i\omega_0 t}\right]. \tag{15.17}$$

再利用方程(2.16),並且根據方程(15.11),最後得到指示輸出 $y$ 如下:

$$y=\frac{16a^2k}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)^2(2m+1)^2}$$

$$\cdot\left\{F_o[(n+m+1)i\omega_0]F_i\left(\frac{2n+1}{2}i\omega_0\right)F_i\left(\frac{2m+1}{2}i\omega_0\right)e^{(n+m+1)i\omega_0 t}\right.$$

$$-F_o[(n-m)i\omega_0]F_i\left(\frac{2n+1}{2}i\omega_0\right)F_i\left(-\frac{2m+1}{2}i\omega_0\right)e^{(n-m)i\omega_0 t}$$

$$-F_o[-(n-m)i\omega_0]F_i\left(-\frac{2n+1}{2}i\omega_0\right)F_i\left(\frac{2m+1}{2}i\omega_0\right)e^{-(n-m)i\omega_0 t}$$

$$\left.+F_o[-(n+m+1)i\omega_0]F_i\left(-\frac{2n+1}{2}i\omega_0\right)F_i\left(-\frac{2m+1}{2}i\omega_0\right)e^{-(n+m+1)i\omega_0 t}\right\}. \tag{15.18}$$

方程(15.17)和(15.18)清楚的表示出，輸出的搜索周期 $T$ 只是輸入的變化周期的二分之一。由於輸入和輸出之間的基本抛物綫關係,這自然是可以預料得到的結論。

$y$ 對於時間的平均值給出以最優輸出 $y_0$ 作爲參考的搜索損失 $D$. 由方程(15.18)可知，平均值是那個方程中第二項和第三項內 $m=n$ 的量相加得到的結果。注意到方程(15.10),就得出

$$D=\frac{32a^2k}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}\left|F_i\left(\frac{2n+1}{2}i\omega_0\right)\right|^2. \tag{15.19}$$

當沒有動力學現象影響的時候，$F_i\equiv 1$，我們可以很容易檢驗這個公式是否正確，如果 $F_i\equiv 1$,級數的求和就簡單了,這時得到 $D=D^*=a^2k/3=\Delta^*/3$，正與方程(15.2)要求的相同。方程(15.19)也表明:輸出的平均值和搜索損失與輸出綫性羣部分無關,自然,這正是我們想像得到的情形,因爲輸出的狀態由輸入 $x$ 決定,並不受輸出綫性部分動力學現象的影響。輸出綫性部分的影響僅僅是使輸出有一些微小的變化。在內燃發動機的例子中,發動機的功率是輸出,輸出綫性部分動力學現象的影響由那些能活動部分的慣性所決定。發動機的功率必然與那些能活動部分的慣性無關。

如果輸入和輸出之間只有一般形式的傳遞函數,那末,根據方程(15.18)計算輸出 $y$ 是件很困難的事情。但是實際設計自尋最優點系統的時候,爲了避免高頻干擾,通常使搜索周期 $T$ 比較長,這時動力學影響雖然不是完全可以忽略的,但影響也不大。換句話說,我們可以假設輸入綫性部分以及輸出綫性部分的時間常數比搜索周期小，然後根據這種假

設進行分析．例如，假設輸入綫性部分可以近似地用一個一階系統表示，它的時間常數等於$\tau_i$，也就是

$$F_i(s)=\frac{1}{1+\tau_i s}, \tag{15.20}$$

由於假設$\tau_i$和$T$比較起來是一個小的數量，於是無量綱量$\tau_i\omega_0$也相當小，在這種條件下，方程(15.15)和(15.16)那個級數中開始幾個諧波差不多具有相同的振幅．根據方程(3.14)，$x^*$和$x$中所包含的相應的低頻諧波之間，差別只在於相角間有一個大小等於$\tau_i$的滯後．所以離策動反轉點比較遠的那些$x^*$以及$x$的區域，$x^*(t)$以及$x(t)$曲綫的曲率很小，它們的值主要由開始幾個諧波決定，曲綫$x(t)$滯後於曲綫$x^*(t)$一個相角$\tau_i$，而振幅不改變．從$x^*$變到$x$，齒形波的尖角變圓了，但曲綫的形狀大致沒有改變，正如圖 15.7(a)那樣．假設輸出綫性部分也可以近似地用一個特性時間等於$\tau_0$的一階系統表示，於是也可以同樣地考慮$y$和$y^*$之間的關係，不難看出，$y$和$y^*$的曲綫形狀基本上相同，只是$y$滯後於$y^*$一個相角$\tau_0$。這個事實正如圖 15.7(b)所畫的那樣．

對於方程(15.20)給出來輸入綫性部分的傳遞函數，我們可以由方程(15.19)來計算搜索損失，

$$\begin{aligned}D&=\frac{32a^2k}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}\,\frac{1}{1+(2n+1)^2(\tau_i\omega_0/2)^2}\\&=\frac{32a^2k}{\pi^4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}-\left(\frac{\tau_i\omega_0}{2}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{\tau_i\omega_0}{2}\right)^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+(2n+1)^2(\tau_i\omega_0/2)^2}\right].\end{aligned}$$

但是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

利用大家所熟悉的雙曲餘切函數展開式(這種展開式在第七章第五節曾經引用過)，就得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+(2n+1)^2(\tau_i\omega_0/2)^2}=\frac{\pi}{\tau_i\omega_0}\left[\coth\frac{2\pi}{\tau_i\omega_0}-\frac{1}{2}\coth\frac{\pi}{\tau_i\omega_0}\right].$$

從方程(15.14)，$T=2\pi/\omega_0$，最後得到

$$D=\frac{a^2k}{3}\left[1-12\left(\frac{\tau_i}{T}\right)^2+48\left(\frac{\tau_i}{T}\right)^3\left(\coth\frac{T}{\tau_i}-\frac{1}{2}\coth\frac{T}{2\tau_i}\right)\right]. \tag{15.21}$$

如果時滯$\tau_i$比周期$T$小得很多，雙曲餘切函數幾乎等於一，於是

$$D\approx\frac{a^2k}{3}\left[1-12\left(\frac{\tau_i}{T}\right)^2+24\left(\frac{\tau_i}{T}\right)^3\right]\quad \frac{\tau_i}{T}\ll 1. \tag{15.22}$$

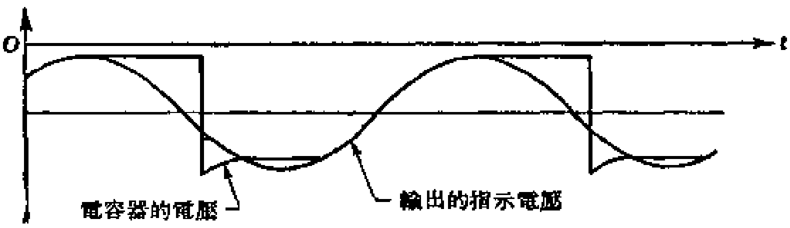
因為輸入的振幅$a$可以用輸入的速率和周期$T$表示，藉助輸入的速率以及周期$T$，方程(15.21)和(15.22)具體給出搜索損失$D$，對於自動保持最高點控制系統，如果它的輸入綫性部分是一階系統，時滯等於$\tau_i$，這些方程明顯的指出，由於輸入綫性部分的滯後的影響，

搜索損失可以減小，然而，事實並不能如此：因爲給出決定策動輸入反轉方向的臨界電壓差 $v$ 時，必須考慮噪聲和干擾的影響，搜索周期 $T$ 應該大一些，因此當有時滯 $\tau_i$ 以及 $\tau_0$ 時，搜索周期 $T$ 就比沒有時滯時要大一些，$a$ 也隨之大一些．總的結果是搜索損失增加了，而不是減少了．

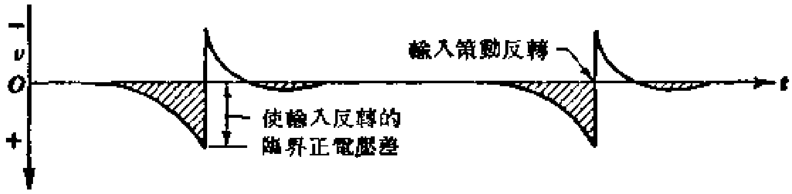
## 15.6 穩定運轉的設計

對於任何控制系統，穩定的意義是說：即使出現內部的或外來的干擾時，系統也將會達到設計中所要求的性能．我們已經看到，對於一般伺服控制系統，以及前面幾章所談到那些更具有普遍性的控制系統中，這個要求是怎樣被滿足的． 至於自尋最優點系統的運轉，主要之點是：必須使輸入信號的策動和輸出信號配合得恰當，使得輸出保持在最優點附近，這種運轉情況必須不致於因爲內部的或外來的干擾影響而遭到破壞． 如果系統設計得好，能達到上述要求，我們就得到運轉穩定的系統．

對於自動保持最高點控制系統，我們已經敍述過，採用輸出量的電壓對一個電容器充電和放電來策動輸入信號． 如果輸出下降，電容器的電壓和輸出指示電壓有一個電壓差 $v$，當 $v$ 達到規定的臨界值，就使輸入的方向反轉，在輸入反轉方向的時刻，電容器放電，它的電壓又和輸出指示電壓相等． 如果有動力學現象的影響，那末即使輸入信號反轉方向以後，由於輸入綫性部分以及輸出綫性部分的時滯作用，輸出仍然繼續下降，輸出和電容器之間又有電壓差．只有當輸出的值增加到輸入反轉方向時對應的那個輸出值的時候，才沒有電位差，這個過程可以用圖 15.7(c)表示出來．在時刻 1 和 2 (圖 15.7) 之間，我們當然不希望那個發生混淆作用的正電壓 $v$ 出現，因爲在這段時間內會產生反轉輸入信號方向的危險．爲了大大地減小這個起混淆作用的正電壓，在反轉輸入信號方向的時刻，使電容器的電壓比那一個時刻輸出指示電壓低一些，以後電容器的電壓又隨着輸出的指示電壓而改變．把電容器的電容和綫路電阻加以適當的選擇，使得輸出增加的時候，電容器的電壓差不多和輸出指示電壓相等．這個電壓的變化如圖 15.8 所示，這樣就大大的減小了




(a)




(b)

圖 15.8

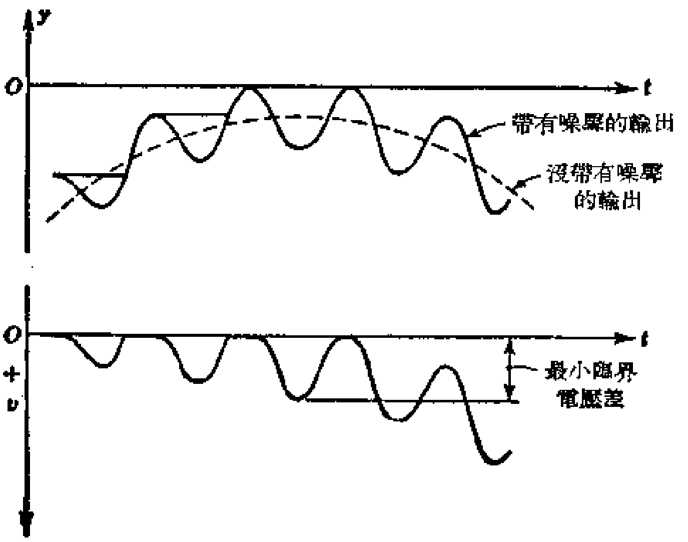



圖 15.9

那個起混淆作用的正電壓差的危險性(圖 15.8(b)),控制系統的穩定性能也就得到改善.

我們已經談到過,因爲有干擾和噪聲的存在,要想減小搜索範圍和搜索損失是受到一定限制的. 這又是一個關於穩定運轉的問題: 我們不希望產生不正確的使輸入信號反轉方向的信號. 如果決定輸入信號反轉方向的臨界電壓差太小, 那末就會產生不正確的信號. 這種情形可以由圖 15.9 表示, 其中輸出 $y$ 包含着一個高頻正弦噪聲. 很容易看出來,假設臨界電壓差太小,那麼噪聲的作用將會使輸入按一種不規則的狀態變化. 爲了運轉穩定起見,臨界電壓差必須比干擾的振幅來得大. 這樣,自尋最優點系統的搜索損失不能夠比系統中噪聲的振幅小. 自然,如果像圖中表示的那樣,干擾的振幅是常數的眞正的純粹高頻正弦波,那末可以採用過濾器消除噪聲的影響,於是也就可以採用一個小得多的搜索範圍,實際上,如果噪聲或者干擾具有某種固定狀態, 我們可以設計一個合適的過濾器來改善這種受到限制的系統性能.

# 第十六章

# 噪聲過濾的設計原理

除了上一章以外，在所有前面的討論中，我們一直默認：控制系統不產生噪聲和干擾，所以，從理論上講，控制系統的精確程度是沒有限制的。然而，在上一章中，我們曾經指出，噪聲和干擾實際上使自動尋求最優運轉點控制系統的輸出信號變模糊了，因此，噪聲和干擾就成爲這種控制系統基本的設計限制條件。事實上，噪聲和干擾在任何一個工程系統中都是存在的，因爲，甚至於"完善"的系統也有熱擾動。只有在信號比干擾强得多的情况下，噪聲和干擾對控制系統的影響才能忽略不計。在自動尋求最優運轉點系統的設計中，爲了減少輸出的搜索損失，我們需要對"微弱"的信號進行設計，因而噪聲的問題就是頭等重要的了。一般說來，只要控制信號的强度比干擾的强度弱，那麼噪聲和干擾的影響就不能忽略。

可以在控制系統中由於引入一個適當的裝置來減少噪聲的影響，這個裝置將會"過濾"噪聲，而儘可能不削弱信號的强度，這個過濾噪聲的問題是本章的主題。首先我們將給出最優綫性過濾器的理論，這一理論是由維納 (N. Wiener)[1]和閣爾莫果洛夫 (А. Н. Колмоторов)[2] 所提出的。本章的後面幾節將討論這一非常有效的理論的應用和推廣。第九章中關於隨機輸入的那些概念和數學工具對我們這裏的討論非常有用。

## 16.1 平均平方誤差

用 $f(t)$代表控制信號，$n(t)$代表噪聲。加到過濾器的輸入 $x(t)$就是

$$x(t) = f(t) + n(t). \tag{16.1}$$

從過濾器的輸出是 $y(t)$，如圖 16.1. 假設過濾器是一個綫性過濾器，描寫輸出和輸入間相互關係的微分方程是一個常系數綫性微分方程，那末，過濾器的性質完全由它的傳遞函數 $F(s)$決定。如果已經知道了 $F(s)$，過濾器對於單位冲量的反應可以從方程 (2.18) 得到。如果 $F(s)$的極點只在 $s$ 平面的左半平面上，我們可以寫出下列公式：

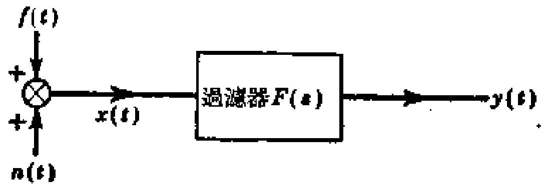



圖 16.1

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{st}F(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}F(i\omega)d\omega. \tag{16.2}$$

由方程(16.1)的輸入而得到的輸出就是

1) N. Wiener, "The extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.

2) A. Kolmogoroff, *Bull. acad. sci. U.R.S.S., Ser. Math.*, **5**, 3—14 (1941).

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\eta)h(t-\eta)d\eta,$$

其中假定輸入在很早以前就有了作用．令 $t-\eta=\tau$；於是

$$y(t)=\int_{0}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau. \tag{16.3}$$

用 $z(t)$表示我們所希望的輸出，它由信號 $f(t)$以及所希望的單位冲量反應 $h_1(t)$所決定，也就是

$$z(t)=\int_{0}^{\infty}f(t-\tau)h_1(\tau)d\tau, \tag{16.4}$$

$h_1(t)$可以從希望的傳遞函數 $F_1(s)$求得，於是，類似於方程(16.2)，我們就有

$$h_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{st}F_1(s)ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}F_1(i\omega)d\omega. \tag{16.5}$$

因爲眞正的輸出並非 $z(t)$而是 $y(t)$，誤差就等於這兩個量的差．根據方程(16.3)和(16.4)

$$e(t)=y(t)-z(t)=\int_{0}^{\infty}\{[f(t-\tau)+n(t-\tau)]h(\tau)-f(t-\tau)h_1(\tau)\}d\tau. \tag{16.6}$$

於是誤差的平方是

$$\begin{aligned}e^2(t)=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}&\{[f(t-\tau)+n(t-\tau)]h(\tau)-f(t-\tau)h_1(\tau)\}\\&\cdot\{[f(t-\tau')+n(t-\tau')]h(\tau')-f(t-\tau')h_1(\tau')]\}d\tau d\tau'.\end{aligned} \tag{16.7}$$

現在我們提出一個非常重要的假設．因爲噪聲 $n(t)$是一個隨機函數，僅僅能確定它的統計特徵．除此而外，我們不能够確實地預先知道 $f(t)$是什麽，而只能知道它比較一般的特徵，所以，甚至於對於信號，我們也只能確定它的統計特徵．於是我們可以量出 $e^2(t)$的系集平均值，從而估計統計誤差．通常，這個平均值是一個時間 $t$ 的函數．但是如果我們假設隨機函數 $f(t)$ 和 $n(t)$ 是第 9.1 節那樣定義的平穩隨機函數，於是 $\overline{e^2}$ 就和時間無關．而且我們還可以認爲信號 $f(t)$和噪聲 $n(t)$的平均值都等於零，於是從方程(16.6)可以明顯地看出誤差 $e(t)$的平均值也等於零．現在我們引進信號及噪聲的關連函數(即相關函數)如下，這裏關連函數的討論和第 9.2 節完全相同，

$$\left.\begin{aligned}\overline{f(t-\tau)f(t-\tau')}&=R_{ff}(\tau-\tau'),\\\overline{f(t-\tau)n(t-\tau')}&=R_{fn}(\tau-\tau'),\\\overline{n(t-\tau)f(t-\tau')}&=R_{nf}(\tau-\tau'),\\\overline{n(t-\tau)n(t-\tau')}&=R_{nn}(\tau-\tau').\end{aligned}\right\} \tag{16.8}$$

這裏我們考慮信號和噪聲之間關連函數不等於零的一般情形．通常，這些互相關連函數 $R_{fn}$ 和 $R_{nf}$ 在很多情況下都等於零，只有自相關連函數 $R_{ff}$ 和 $R_{nn}$ 保留下來．自相關連函數是對稱的函數．互相關連函數不是對稱函數，但是，根據定義它們有下述關係

$$\left.\begin{aligned}R_{fn}(\tau'-\tau)&=R_{nf}(\tau-\tau'),\\R_{nf}(\tau'-\tau)&=R_{fn}(\tau-\tau').\end{aligned}\right\} \tag{16.9}$$

利用這些定義，從方程(16.7)得到的平均平方誤差 $\overline{e^2}$ 可以寫成

$$\overline{e^2} = \int_0^\infty \int_0^\infty \{R_{ff}(\tau - \tau')[h(\tau) - h_1(\tau)][h(\tau') - h_1(\tau')] + R_{fn}(\tau - \tau')[h(\tau) - h_1(\tau)]h(\tau') + R_{nf}(\tau - \tau')h(\tau)[h(\tau') - h_1(\tau')] + R_{nn}(\tau - \tau')h(\tau)h(\tau')\}d\tau d\tau'. \tag{16.10}$$

由這個方程可以從關連函數和單位冲量的反應來分析平均平方誤差.

控制系統的設計工程師們往往願意選取傳遞函數 $F(s)$ 和 $F_1(s)$ 直接進行分析. 要這樣做的話, 我們引入關連函數的富氏變換, 設這些富氏變換分別是 $\Phi_{ff}(\omega)$, $\Phi_{fn}(\omega)$, $\Phi_{nf}(\omega)$, 和 $\Phi_{nn}(\omega)$, 它們由下列各方程確定

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{ff}(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau,\\
\Phi_{fn}(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{fn}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau,\\
\Phi_{nf}(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{nf}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau,\\
\Phi_{nn}(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{nn}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau.
\end{aligned}\right\} \tag{16.11}$$

因爲 $R_{ff}(\tau)$是 $\tau$ 的對稱函數,我們可以寫成

$$\Phi_{ff}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty R_{ff}(\tau)(e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau})d\tau = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R_{ff}(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

把這個式子和方程(9.23)比較,我們立刻看出 $\Phi_{ff}(\omega)$ 實際上就是信號 $f(t)$ 的功率譜, 同樣, $\Phi_{nn}(\omega)$ 是噪聲 $n(t)$ 的功率譜. 更進一步,因爲互相關連函數有方程(16.9)表示的關係,很容易看出富氏變換也有同樣形式的關係:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{fn}(-\omega) &= \Phi_{nf}(\omega),\\
\Phi_{nf}(-\omega) &= \Phi_{fn}(\omega).
\end{aligned}\right\} \tag{16.12}$$

根據富氏積分定理[1],方程(16.11)的反演公式是:

$$\left.\begin{aligned}
R_{ff}(\tau - \tau') &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ff}(\omega)e^{i\omega(\tau-\tau')}d\omega,\\
R_{fn}(\tau - \tau') &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{fn}(\omega)e^{i\omega(\tau-\tau')}d\omega,\\
R_{nf}(\tau - \tau') &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{nf}(\omega)e^{i\omega(\tau-\tau')}d\omega,\\
R_{nn}(\tau - \tau') &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{nn}(\omega)e^{i\omega(\tau-\tau')}d\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{16.13}$$

把方程(16.13)代入方程(16.10), 我們可以得到用傳遞函數 $F(s)$ 和 $F_1(s)$ 表示的平均平方誤差的一個方程. 例如方程(16.10)的第一部分變成

1) 例如,可以參閱 Whittaker and Watson, "Modern Analysis", 第 6.31 節,第 119 頁, Cambridge-Macmillan, 1943 (俄文譯本 [26]).

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty d\tau\int_0^\infty d\tau'\int_{-\infty}^\infty d\omega\,\Phi_{ff}(\omega)e^{i\omega(\tau-\tau')}[h(\tau)-h_1(\tau)][h(\tau')-h_1(\tau')]$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty d\omega\,\Phi_{ff}(\omega)\int_0^\infty[h(\tau)-h_1(\tau)]e^{i\omega\tau}d\tau\int_0^\infty[h(\tau')-h_1(\tau')]e^{-i\omega\tau'}d\tau'.$$

但是 $F(s)$ 和 $F_1(s)$ 是 $h(t)$ 和 $h_1(t)$ 的拉氏變換，也就是

$$\left.\begin{aligned}F(i\omega)&=\int_0^\infty h(t)e^{-i\omega t}dt,\\F_1(i\omega)&=\int_0^\infty h_1(t)e^{-i\omega t}dt.\end{aligned}\right\}\tag{16.14}$$

因此方程(16.10)的第一部分可以寫成

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \Phi_{ff}(\omega)[F(i\omega)-F_1(i\omega)][F(-i\omega)-F_1(-i\omega)]d\omega.$$

方程(16.10)的其它項也可以用同樣方式加以改換，於是，我們就最後得到

$$\begin{aligned}\overline{e^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty&\{\Phi_{ff}(\omega)[F(i\omega)-F_1(i\omega)][F(-i\omega)-F_1(-i\omega)]\\&+\Phi_{fn}(\omega)[F(-i\omega)-F_1(-i\omega)]F(i\omega)+\Phi_{nf}(\omega)F(-i\omega)[F(i\omega)-F_1(i\omega)]\\&+\Phi_{nn}(\omega)F(i\omega)F(-i\omega)\}d\omega.\end{aligned}\tag{16.15}$$

上式中大括號{ }裏面的被積函數可以當成誤差 $e(t)$ 的功率譜．根據方程(9.71)，被積函數的最後一項實際上是被過濾的噪聲的功率譜．顯然，第一項和最後一項是實數．第二項和第三項是複數．但是因爲滿足關係式(16.12)，這兩項是共軛複數，所以他們相加的結果也還是實數．

## 16.2 菲利普斯(Phillips)的最優過濾器設計原理

如果信號和噪聲的統計特徵是用各個關連函數給出的，關連函數的富氏變換就可以從方程(16.11)計算出來．假設傳遞函數 $F_1(s)$ 已給定，那末方程(16.5)的平均平方誤差積分式中只有過濾器的傳遞函數 $F(s)$ 是一個沒有確定的函數．最優過濾器是這樣的過濾器，對於已知的那些 $\Phi$ 以及 $F_1(s)$ 來說，這個傳遞函數等於 $F(s)$ 的過濾器使得平均平方誤差最小．一個解決最優過濾器問題的直接方法就是先假定 $F(s)$ 是某種合理的形式，但是還包含着一些待定常數．把這個假定的 $F(s)$ 代入方程(16.15)，於是 $\overline{e^2}$ 就是這些待定常數的函數．根據平均平方誤差必須最小的要求，最後確定這些常數．最優過濾器的設計問題就化成一個求已知函數的極大值或者極小值的問題了．菲利普斯[1]把 $F(s)$ 取成兩個 $s$ 的多項式相除的形式，解決了這一最優過濾器的理論問題．$F(s)$ 的這種特殊的形式的確是最自然的一種選擇方法，因爲從我們有關綫性系統的經驗中得知，傳遞函數恰巧就是兩個多項式相除的形式．但是，這個方法的實際計算還是相當繁重的．由於這個緣故，通常採用維納和闊爾莫果洛夫提出的較爲巧妙的理論．這裏，我們就不再討論菲利普斯的理論．

1) R. S. Phillips. "Theory of Servomechanisms" MIT Radiation Laboratory Series, Vol. 25, Chap. 7, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, (1947) (俄文譯本 [16]).

## 16.3 維納-闊爾莫果洛夫(Wiener-Колмогоров)理論

維納和闊爾莫果洛夫提出的最優過濾器理論的主要之點就是以變分的方法去處理方程(16.15)中的那一個積分．假設對於一定的 $\Phi$ 和 $F_1(s)$，$F(s)$眞正是最優過濾器的傳遞函數；於是用 $F(s)+\eta(s)$表示它鄰近的函數，其中 $\eta(s)$是任意的變分．把這些鄰近的函數代入方程(16.15)，我們找出平均平方誤差的一次變分

$$\begin{aligned}\delta\overline{e^2} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(-i\omega)\{F(i\omega)[\Phi_{ff}(\omega)+\Phi_{fn}(\omega)+\Phi_{nf}(\omega)+\Phi_{nn}(\omega)]\\ &\quad - F_1(i\omega)[\Phi_{ff}(\omega)+\Phi_{nf}(\omega)]\}d\omega\\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(i\omega)\{F(-i\omega)[\Phi_{ff}(\omega)+\Phi_{fn}(\omega)+\Phi_{nf}(\omega)+\Phi_{nn}(\omega)]\\ &\quad - F_1(-i\omega)[\Phi_{ff}(\omega)+\Phi_{fn}(\omega)]\}d\omega. \end{aligned}\tag{16.16}$$

如果 $F(s)$是最優過濾器的傳遞函數，那末，對於任意一個 $\eta(s)$，$\delta\overline{e^2}$ 都必須等於零，這個條件將給出 $F(s)$必須滿足的一個方程．但是在我們採取這一步驟之前，我們把方程(16.10)作某些非常重要的修改．

首先，功率譜 $\Phi_{ff}(\omega)$ 和 $\Phi_{nn}(\omega)$ 是 $\omega$ 的對稱函數． 考慮到關係式(16.12)，我們就看到 $\Phi_{ff}(\omega)$，$\Phi_{fn}(\omega)$，$\Phi_{nf}(\omega)$ 以及 $\Phi_{nn}(\omega)$的和是 $\omega$ 的一個偶函數．我們有理由希望能夠把這個和數 $\Phi$ 作如下的"分解"：

$$\Phi(\omega)=\Phi_{ff}(\omega)+\Phi_{fn}(\omega)+\Phi_{nf}(\omega)+\Phi_{nn}(\omega)=\Psi(i\omega)\Psi(-i\omega),\tag{16.17}$$

按照我們的要求，$\Psi(s)$是一個零點和極點都在左半 $s$ 平面上的函數，於是 $\Psi(-s)$是一個零點和極點都在右半 $s$ 平面上的函數． 由於穩定性的要求，過濾器的傳遞函數它的極點只能夠在左半 $s$ 平面上，所以 $F(s)$ 和 $\eta(s)$ 是只有極點在左半 $s$ 平面的函數，$F(-s)$ 和 $\eta(-s)$是只有極點在右半 $s$ 平面的函數，因此，由於實際的要求就限制了 $F(s)$ 和 $\eta(s)$ 的類型．了解這一點以後，我們把方程寫成

$$\begin{aligned}\delta\overline{e^2} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(-i\omega)\Psi(-i\omega)\left\{F(i\omega)\Psi(i\omega)-\frac{F_1(i\omega)[\Phi_{ff}(\omega)+\Phi_{nf}(\omega)]}{\Psi(-i\omega)}\right\}d\omega\\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(i\omega)\Psi(i\omega)\left\{F(-i\omega)\Psi(i\omega)-\frac{F_1(-i\omega)[\Phi_{ff}(\omega)+\Phi_{fn}(\omega)]}{\Psi(i\omega)}\right\}d\omega.\end{aligned}\tag{16.18}$$

但是，方程 (16.18) 的兩個大括號中的第二項並不都是重要的． 假設 $F(s)$ 和 $K(s)$ 是極點在左半 $s$ 平面上的函數，並且假設 $s$ 很大的時候，他們的變化和 $1/s^n$ 相同，其中 $n\geqslant 1$，那末

$$\int_{-\infty}^{\infty}H(i\omega)K(i\omega)d\omega = i\oint H(s)K(s)ds,$$

上式中第二個積分的閉積分路綫是虛軸以及包含右半 $s$ 平面的一個封閉半圓，如圖 16.2 ($a$)．但是 $H(s)$ $K(s)$的奇點在積分路綫外面，因此積分等於零．對於 $H(-i\omega)$ $K(-i\omega)$而言，它的奇點在右半 $s$ 平面上，可以把積分路綫取成通過虛軸和包含左半 $s$ 平面的半圓，如圖 16.2($b$)，這時積分路綫內就不包含奇點，因而積分也等於零． 可是就乘積 $H(i\omega)$ $K(-i\omega)$或者 $H(-i\omega)$ $K(i\omega)$而言，無論積分路綫通過左半 $s$ 平面或者右半 $s$ 平面， 積

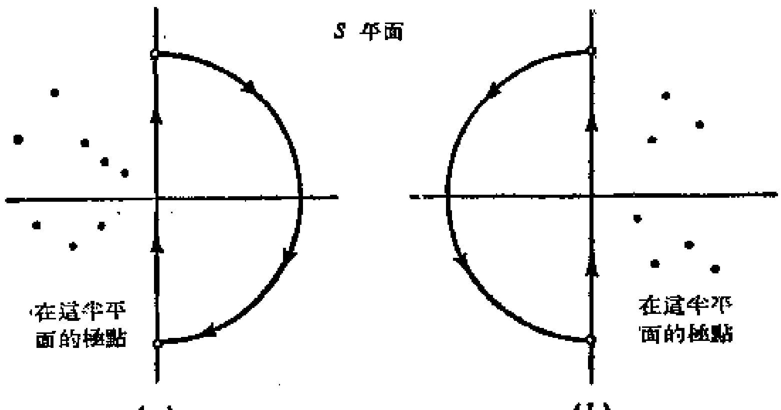



圖 16.2

分路綫總會包着一些奇點,所以,一般說來,積分有一定的數值. 因此,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega)K(i\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} H(-i\omega)K(-i\omega)d\omega = 0, \tag{16.19}$$

而

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega)K(-i\omega)d\omega \neq 0,\\ \int_{-\infty}^{\infty} H(-i\omega)K(i\omega)d\omega \neq 0.\end{aligned}\right\} \tag{16.20}$$

記住以上事實後,我們把 $F_1(s)\Phi_{ff}(s/i)/\Psi(-s)$ 分成兩部分:其中第一部分的奇點都在左半 $s$ 平面,用$[\ ]_+$表示,另外一部分的奇點都在右半 $s$ 平面,用$[\ ]_-$表示.

$$\frac{F_1(i\omega)\{\Phi_{ff}(\omega)+\Phi_{nf}(\omega)\}}{\Psi(-i\omega)} = \left[\frac{F_1(i\omega)\{\Phi_{ff}(\omega)+\Phi_{nf}(\omega)\}}{\Psi(-i\omega)}\right]_+ + \left[\frac{F_1(i\omega)\{\Phi_{ff}(\omega)+\Phi_{nf}(\omega)\}}{\Psi(-i\omega)}\right]_-. \tag{16.21}$$

這樣作了以後,根據方程(16.19)和(16.20),我們可以把方程(16.18)寫成

$$\begin{aligned}\delta\overline{e^2} = &\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(-i\omega)\Psi(-i\omega)\left\{F(i\omega)\Psi(i\omega) - \left[\frac{F_1(i\omega)\{\Phi_{ff}(\omega)+\Phi_{nf}(\omega)\}}{\Psi(-i\omega)}\right]_+\right\}d\omega\\ &+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(i\omega)\Psi(i\omega)\left\{F(-i\omega)\Psi(-i\omega) - \left[\frac{F_1(-i\omega)\{\Phi_{ff}(\omega)+\Phi_{fn}(\omega)\}}{\Psi(i\omega)}\right]_-\right\}d\omega.\end{aligned} \tag{16.22}$$

如果 $F(s)$ 確實是最優過濾器的傳遞函數, 那末, 對於任意的 $\eta(s)$ 而言, $\delta\overline{e^2}$ 都必須等於零. 於是方程(16.22)中大括號裏面的那些量必須等於零,這個條件確定了最優過濾器的傳遞函數如下:

$$F(s) = \frac{1}{\Psi(s)}\left[\frac{F_1(s)\{\Phi_{ff}(s/i)+\Phi_{nf}(s/i)\}}{\Psi(-s)}\right]_+. \tag{16.23}$$

這就是維納和闊爾莫果洛夫給出的最優過濾器問題的解答. 因為 $\Psi(s)$的極點在左半 $s$ 平面上,所以 $F(s)$ 的極點也在左半 $s$ 平面上, $F(s)$ 是一個穩定的傳遞函數. 想從函數

$F_1(s)\{\Phi_{ff}(s/i)+\Phi_{nf}(s/i)\}/\Psi(-s)$ 中分出極點在左半 $s$ 平面的部分的運算，也可以用分析的辦法完成，實際上

$$F(s)=\frac{1}{2\pi\Psi(s)}\int_0^{\infty}e^{-st}dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_1(i\omega)\{\Phi_{ff}(\omega)+\Phi_{nf}(\omega)\}}{\Psi(-i\omega)}e^{i\omega t}d\omega. \tag{16.24}$$

用 $\omega$ 平面上的迴路積分方法不難判斷這個積分的有效性．至於在實際計算中到底採用方程(16.23)還是(16.24)，這就要依據不同的具體情形來決定．通常，方程(16.23)用起來比較容易．無論如何，對於確定的 $F_1(s)$，確定的信號和噪聲的確定的功率譜 $\Phi_{ff}, \Phi_{fn}, \Phi_{nf}$ 和 $\Phi_{nn}$ 來說，最優過濾器的性質就是完全確定的．當噪聲不出現的時候，$\Phi_{nn}=\Phi_{fn}=\Phi_{nf}=0$, $\Phi_{ff}(\omega)=\Psi(i\omega)\Psi(-i\omega)$．根據方程(16.17)，就有 $F(s)=F_1(s)$, $e(t)\equiv 0$ 這是可以事先想到的．如果有噪聲的話，$F(s)$不等於 $F_1(s)$，即使最好的過濾器也不可能完全消除平均平方誤差．

關於選取一個函數的極點在左半 $s$ 平面那一部分的運算，我們可以介紹另外一種解釋．由方程(16.2)，可以考慮 $F(i\omega)$是單位冲量反應 $h(t)$的富氏變換，那個方程也表明如何從 $F(i\omega)$來計算 $h(t)$．因爲方程(16.2)的被積函數有因子 $e^{i\omega t}$．對於正的 $t$ 和負的 $t$ 這兩種情況，在複數 $\omega$ 平面上所取的積分路綫一定有所不同，正如圖 16.3 所畫的那樣．假設 $F(s)$只有在左半 $s$ 平面上的極點，那末 $F(i\omega)$只有在上半 $\omega$ 平面上的極點．假設 $F(s)$ 只有在右半 $s$ 平面上的極點，那末 $F(i\omega)$只有在下半 $\omega$ 平面上的極點．所以，對於 $t>0$ 的情形，只有假設 $F(s)$的極點在左半 $s$ 平面，積分路綫才會包含 $F(i\omega)$的極點，在那種情況下，反應函數 $h(t)$不會等於零．對於 $t<0$ 的情形，只有假設 $F(s)$的極點都在左半 $s$ 平面，積分路綫才會不包含 $F(i\omega)$的極點，而且，還有 $h(t)=0$．另外一方面，假設 $F(s)$ 有極點在右半 $s$ 平面上．根據現在的解釋，在這種不穩定傳遞函數的情形中，甚至於對於負的 $t$, $h(t)$ 也不等於零．因爲在 $t=0$ 的時候冲量才開始作用，負的時間有反應意味着冲量作用前就有了反應，任何物理系統都不可能發生這種情況．所以，從已知函數選取只有極點在左半 $s$ 平面那一部分的運算使得傳遞函數實際上能够實現，因爲在這種情況中，$t<0$ 的時候 $h(t)=0$．在實際上能實現的傳遞函數這一概念的基礎上，伯德(H. W. Bode) 和申南 (C. E. Shannon) 給維納和關爾莫果洛夫的解答，[也即給出方程(16.22)和(16.23)]作了一個解釋[1]．

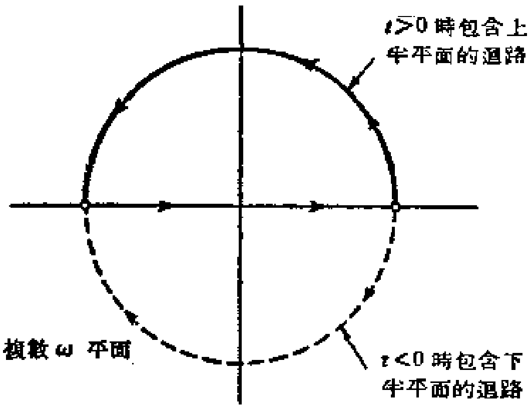



圖 16.3

上面的討論中還有另外一點需要加以說明，我們曾經假設可以把功率譜的總和分解成(16.7)所表示的形式，但是對於 $\omega$ 的任意一個正值偶函數 $\Phi(\omega)$ 不見得總能分解成那種

1) H. W. Bode and C. E. Shannon, *Proc. IRE*, **38**, 417—425 (1950).

形式. 如果要使得 $\Phi(\omega)$ 能够進行這種分解, $\Phi(\omega)$ 必須滿足維納-派勒(R. E. A. C. Paley)準則[1])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log \Phi(\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < \infty. \tag{16.25}$$

具體地說, $\Phi(\omega)$ 或者像在白色噪聲的情形中那樣, 是一個常數, 或者當 $\omega \to \infty$ 的時候趨近於零. 維納-派勒準則說明, 當 $\omega$ 的值很大時, $\Phi(\omega)$ 趨近於零不能過份快, 如果 $\Phi(\omega)$ 像 $\omega^{-n}$ 那樣的速度趨近於零是可以允許的, 但是如果它像 $e^{-|\omega|}$ 或者 $e^{-\omega^2}$ 那樣快地趨近於零就會使積分發散. 後面兩種類型的 $\Phi(\omega)$ 就不能够分解. 但是值得慶幸的是: 信號和噪聲的功率譜通常是 $\omega^2$ 的多項式之比. 所以, 根據方程(16.17)那樣的分解通常可以成立.

## 16.4 一些簡單的例子

考慮一個簡單的例子, 我們取信號的功率譜如下:

$$\Phi_{ff}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^4}. \tag{16.26}$$

假設噪聲是白色噪聲, 它的功率譜是平的, 等於常數

$$\Phi_{nn}(\omega) = n^4. \tag{16.27}$$

互相關連函數和他們的富氏變換等於零, 也即

$$\Phi_{fn} = \Phi_{nf} = 0. \tag{16.28}$$

要求設計對信號起着求微分作用的最優過濾器, 也就是 $F_1(s) = s$, 首先我們注意

$$\Phi(\omega) = \Phi_{ff}(\omega) + \Phi_{nn}(\omega) = \frac{(1+n^4)+n^4\omega^4}{1+\omega^4}.$$

於是

$$\Phi(s/i) = \Psi(s)\Psi(-s) = \frac{(1+n^4)+n^4 s^4}{1+s^4}.$$

這個函數顯然可以直接進行分解, 要注意 $\Psi(s)$ 只有極點和零點在左半 $s$ 平面上, 我們立刻可以寫出 $\Psi(s)$ 如下:

$$\Psi(s) = \frac{n^2s^2 + n\sqrt{2}\sqrt[4]{1+n^4}\,s + \sqrt{1+n^4}}{s^2+\sqrt{2}\,s+1}.$$

於是

$$\begin{aligned}\frac{F_1(s)\Phi_{ff}(s/i)}{\Psi(-s)} &= \frac{s}{(s^2+\sqrt{2}\,s+1)(n^2s^2 - n\sqrt{2}\sqrt[4]{1+n^4}\,s + \sqrt{1+n^4})} \\ &= \frac{AS+B}{s^2+\sqrt{2}\,s+1} + \frac{Cs+D}{n^2s^2 - n\sqrt{2}\sqrt[4]{1+n^4}\,s+\sqrt{1+n^4}},\end{aligned}$$

其中 $A, B, C,$ 和 $D$ 都是常數, 很明顯極點只在左半 $s$ 平面的部分是第一項, 因此

$$\left[\frac{F_1(s)\Phi_{ff}(s/i)}{\Psi(-s)}\right]_+ = \frac{As+B}{s^2+\sqrt{2}\,s+1}.$$

1) R. E. A. C. Paley and N. Wiener, "Fourier Transforms in the Complex Domain," *Am. Math. Soc.* Colloquium Publication, Vol. 19, p. 17, 1934.

把 $A, B$ 確定後我們得到

$$F(s)=\frac{1}{\Psi(s)}\left[\frac{F_1(s)\Phi_{ff}(s/i)}{\Psi(-s)}\right]_+=\frac{1}{(n^2+\sqrt{1+n^4})(n+\sqrt[4]{1+n^4})}\cdot\frac{(\sqrt[4]{1+n^4}-n)s-n\sqrt{2}}{n^2s^2+n\sqrt{2}\sqrt[4]{1+n^4}s+\sqrt{1+n^4}}. \tag{16.29}$$

這就是最優過濾器的傳遞函數．當沒有噪聲的時候，$n\to 0$，$F(s)$就隨之趨於 $s$，這是當然的結果．

另外一個有趣的例子是噪聲的強度非常高，而信號比較微弱的情況． 如果是白色噪聲，它的功率譜 $\Phi_{nn}$ 是

$$\Phi_{nn}(\omega)=1. \tag{16.30}$$

這裏噪聲和信號的互相關連函數也等於零，方程 (16.28) 仍然成立． 把信號的功率譜寫成

$$\Phi_{ff}(\omega)=k\varphi(\omega), \tag{16.31}$$

其中 $k$ 是一個很小的量，$\varphi(\omega)$是 $\omega$ 的一個偶函數． 假設 $K(s)$是函數 $\varphi(s/i)$的極點在左半 $s$ 平面的部分，也就是

$$K(s)=\left[\varphi\left(\frac{s}{i}\right)\right]_+=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-st}dt\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{16.32}$$

因爲 $\varphi(\omega)$是 $\omega$ 的偶函數，於是

$$\varphi\left(\frac{s}{i}\right)=K(s)+K(-s),$$

並且

$$\Phi(\omega)=\Psi(i\omega)\Psi(-i\omega)=1+k\varphi(\omega)\approx[1+kK(i\omega)][1+kK(-i\omega)]. \tag{16.34}$$

所以，假設 $F_1(s)$表示對信號所希望進行的作用，最優過濾器的傳遞函數給出如下

$$F(s)\approx\frac{k}{1+kK(s)}\left[\frac{F_1(s)\varphi(s/i)}{1+kK(-s)}\right]_+. \tag{16.35}$$

這是對於數值小的 $k$ 的二次近似式，一次近似式甚至於還要簡單一些，

$$F(s)\approx k\left[F_1(s)\varphi\left(\frac{s}{i}\right)\right]_+. \tag{16.36}$$

作爲一個例子，把信號的功率譜表示如下：

$$\varphi(\omega)=\frac{1}{1+\omega^4},$$

令 $F_1(s)=s$. 於是當 $k$ 很小的時候，

$$F(s)\approx-\frac{k}{2\sqrt{2}}\frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}.$$

當 $n$ 很大的時候，再設 $k=1/n^4$ 把這個結果和方程 (16.29) 加以對照，就可以進一步驗證方程 (16.29)，所以在有强烈噪聲干擾的情况下，起微分作用的最優過濾器的傳遞函數收

變得非常厲害，和 $F_1(s)=s$ 完全沒有相似之處.

### 16.5 維納-闊爾莫果洛夫理論的應用

除了上節討論過的一些簡單例子以外，維納-闊爾莫果洛夫理論有許多非常重要的應用，在這一節裏，我們將討論其中的一部分.

預卜過濾器. 這種過濾器的輸入是信號 $f(t)$ 及噪聲 $n(t)$ 的和. 給出輸出信號 $y(t)$，它所表示的並非接近信號在 $t$ 時刻的值，而是信號在 $t+\alpha$ 的值，其中 $\alpha$ 是一個正數. 這樣

$$F_1(s)=e^{\alpha s}. \tag{16.37}$$

現在我們假設信號是一個隨機開關函數，於是，根據方程(9.50)，它的功率譜可以寫成

$$\Phi_{ff}=\frac{1}{1+\omega^2}. \tag{16.38}$$

假設是白色噪聲，它的功率譜是

$$\Phi_{nn}=n^2. \tag{16.39}$$

信號和噪聲之間互相關連的譜 $\Phi_{fn}$ 和 $\Phi_{nf}$ 都等於零，於是有

$$\Phi(\omega)=\Psi(i\omega)\Psi(-i\omega)=\frac{(1+n^2)+n^2\omega^2}{1+\omega^2}.$$

所以

$$\Psi(i\omega)=\frac{\sqrt{1+n^2}+ni\omega}{1+i\omega}.$$

因此

$$\frac{F_1(i\omega)\Phi_{ff}(\omega)}{\Psi(-i\omega)}=\frac{e^{i\alpha\omega}}{(1+i\omega)(\sqrt{1+n^2}-ni\omega)}.$$

在這種情況下，將要利用方程(16.24)來計算 $F(s)$，首先，當 $t>0$ 時，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_1(i\omega)\Phi_{ff}(\omega)}{\Psi(-i\omega)}e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t+\alpha)}d\omega}{(1+i\omega)(\sqrt{1+n^2}-ni\omega)}$$
$$=\frac{e^{-(t+\alpha)}}{n+\sqrt{1+n^2}}.$$

因此，根據方程(16.24)，

$$F(s)=\frac{1+s}{\sqrt{1+n^2}+ns}\int_0^{\infty}e^{-st}\frac{e^{-(t+\alpha)}}{n+\sqrt{1+n^2}}dt$$
$$=\frac{(1+s)e^{-\alpha}\int_0^{\infty}e^{-(s+1)t}dt}{(n+\sqrt{1+n^2})(\sqrt{1+n^2}+ns)}.$$

所以，最後，預卜時間等於 $\alpha$ 的最優過濾器的性質用傳遞函數描寫如下：

$$F(s)=\frac{e^{-\alpha}}{(n+\sqrt{1+n^2})}\frac{1}{(\sqrt{1+n^2}+ns)}. \tag{16.40}$$

滯後過濾器． 這一類卜濾器除了現在的"預卜"時間 $\alpha$ 等於負數而外，它的情形和預卜過濾器相似．但是直接採用前面的計算方法並不能解決現在的問題． 實際上，沒有有限階的綫性系統會真正滿足一個最優滯後過濾器的規律．利用下面的近似公式可以得到一個更為直接的解答．

$$F_1(s) = e^{\alpha s} \approx \left[\frac{1 + (\alpha s/2\nu)}{1 - (\alpha s/2\nu)}\right]^{\nu} \qquad \alpha < 0, \quad \nu = \text{整數}. \tag{16.41}$$

於是我們可以得到最優滯後過濾器的近似表達式．

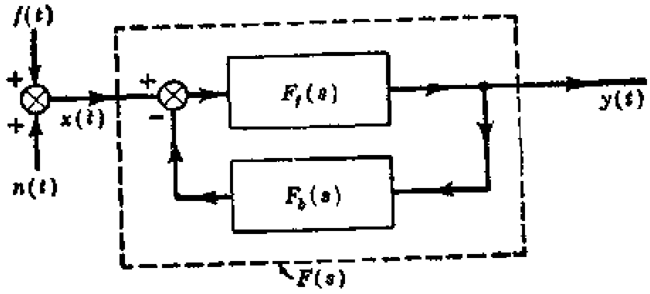


圖 16.4

噪聲作用下的伺服系統． 用 $F_f(s)$ 表示前向綫路的傳遞函數，$F_b(s)$ 表示伺服系統反饋綫路的傳遞函數，如圖 16.4． 用 $F_1(s)$表示希望對信號所進行的作用．問題變成在 $F_f(s)$, $F_1(s)$ 以及信號和噪聲的特性已給定的情況下，求出最優的 $F_b(s)$．正如圖 16.4 所畫的那樣，等價的 $F(s)$是

$$F(s) = \frac{F_f(s)}{1 + F_f(s)F_b(s)}.$$

但是根據過濾器理論，最優過濾器的傳遞函數 $F(s)$ 可以從方程(16.23)或者方程(16.24)求得．知道了 $F(s)$以後，我們得到最優的反饋綫路傳遞函數 $F_b(s)$如下：

$$F_b(s) = \frac{1}{F(s)} - \frac{1}{F_f(s)}.$$

本身產生噪聲的伺服系統．在前面幾段中，我們假定噪聲來自伺服控制系統外面，系統本身不產生噪聲． 然而在很多情況下，伺服控制系統的內部會產生噪聲． 例如，像圖(16.5)所表示的系統除了外來的噪聲 $n(t)$ 而外，還會從測量輸出的儀器那裏產生內噪聲 $m(t)$，或者一種輸出干擾． 這裏仍然用 $F_f(s)$表示前向綫路的傳遞函數，$F_b(s)$表示反饋綫路的傳遞函數，$F_1(s)$ 表示希望對信號所進行的作用．令 $S(s)$, $N(s)$, $M(s)$, $Y(s)$, 和 $Z(s)$分別表示 $f(t)$, $n(t)$, $m(t)$, $y(t)$, 和 $z(t)$的拉氏變換．於是

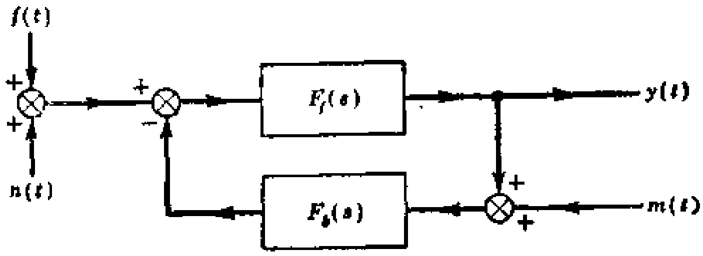


圖 16.5

$$F_f(s)\{S(s) + N(s) - F_b(s)[Y(s) + M(s)]\} = Y(s),$$

以及

$$Z(s) = F_1(s)S(s).$$

所以誤差的拉氏變換 $E(s)$就是

$$E(s) = Y(s) - Z(s) = \frac{F_f(s)}{1 + F_f(s)F_b(s)}[S(s) + N(s)] - \frac{F_f(s)F_b(s)}{1 + F_f(s)F_b(s)} M(s) - F_1(s)S(s).$$

令

$$F(s) = \frac{F_f(s)F_b(s)}{1 + F_f(s)F_b(s)}. \tag{16.43}$$

我們就有

$$1 - F(s) = \frac{1}{1 + F_f(s)F_b(s)}$$

和

$$E(s) = [1 - F(s)][F_f(s)S(s) + F_f(s)N(s) - F_1(s)S(s)] - F(s)[M(s) + F_1(s)S(s)].$$

這個方程表明，現在的伺服控制問題和傳遞函數等於 $F(s)$ 的過濾器問題等價，相應的輸入信號 $S'(s)$ 以及相應的噪聲輸入 $N'(s)$ 給出如下(這裏的撇號"′"不是導數的符號!):

$$\left.\begin{aligned} S'(s) &= \{F_f(s) - F_1(s)\}S(s) + F_f(s)N(s), \\ N'(s) &= M(s) + F_1(s)S(s). \end{aligned}\right\} \tag{16.44}$$

原來的問題是求最優的 $F_b(s)$，現在化成求最優的 $F(s)$，這裏相應的信號和噪聲與未知量 $F_b(s)$ 無關．我們假定原來的信號 $f(t)$ 和噪聲之間沒有關連，只有自相關連函數存在．於是我們只有功率譜 $\Phi_{ff}, \Phi_{nn}, \Phi_{mm}$．利用方程(16.44)，等價的過濾器問題 中，那些 $\Phi$ 是

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{f'f'}\left(\frac{s}{i}\right) &= [F_f(s) - F_1(s)][F_f(-s) - F_1(-s)]\Phi_{ff}\left(\frac{s}{i}\right) \\ &\quad + F_f(s)F_f(-s)\Phi_{nn}\left(\frac{s}{i}\right), \\ \Phi_{f'n'}\left(\frac{s}{i}\right) &= [F_f(-s) - F_1(-s)]F_1(s)\Phi_{ff}\left(\frac{s}{i}\right), \\ \Phi_{n'f'}\left(\frac{s}{i}\right) &= F_1(-s)[F_f(s) - F_1(s)]\Phi_{ff}\left(\frac{s}{i}\right), \\ \Phi_{n'n'}\left(\frac{s}{i}\right) &= \Phi_{mm}\left(\frac{s}{i}\right) + F_1(s)F_1(-s)\Phi_{ff}\left(\frac{s}{i}\right). \end{aligned}\right\} \tag{16.45}$$

由上面的公式可以看出，雖然原來的問題中信號和噪聲沒有關連，可是等價的過濾器問題中仍然有功率譜 $\Phi_{f'n'}$ 和 $\Phi_{n'f'}$．利用方程(16.45)，被分解的函數就是

$$\Phi(\omega) = \Psi(i\omega)\Psi(-i\omega) = F_f(i\omega)F_f(-i\omega)\{\Phi_{ff}(\omega) + \Phi_{nn}(\omega)\} + \Phi_{mm}(\omega). \tag{16.46}$$

根據方程(16.23)，最優的 $F(s)$ 是

$$F(s) = \frac{1}{\Psi(s)}\left[\frac{F_f(s)F_f(-s)\{\Phi_{ff}(s/i) + \Phi_{nn}(s/i)\} - F_1(s)F_f(-s)\Phi_{ff}(s/i)}{\Psi(-s)}\right]_+. \tag{16.47}$$

當 $F(s)$ 已知時，方程(16.43)給出最優的反饋綫路傳遞函數如下:

$$F_b(s) = \frac{1/F_f(s)}{[1/F(s)] - 1}. \tag{16.48}$$

**飽和限制**．考慮圖 16.6 所表示的伺服系統，要求設計得使輸出 $y(t)$ 儘可能的和輸入 $f(t) = x(t)$ 接近．放大器的傳遞函數是 $F_a(s)$，伺服馬達的傳遞函數是 $F_m(s)$．如果設計的條件是適當地變化 $F_a(s)$，使得誤差 $e(t) = y(t) - f(t)$ 的均方儘可能變小．這樣在運轉的過程中，加到馬達裏的控制輸入功率就可能達到非常高的數量．為了避免發生這種功率過高的情況，我們要求加到馬達的功率的平均值必須是某一個確定的值，在這種情形下，平均平方誤差是

$$\overline{e^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{F_a(i\omega)F_m(i\omega)}{1 + F_a(i\omega)F_m(i\omega)} - 1\right]\left[\frac{F_a(-i\omega)F_m(-i\omega)}{1 + F_a(-i\omega)F_m(-i\omega)} - 1\right]\Phi_{ff}(\omega)d\omega. \tag{16.49}$$

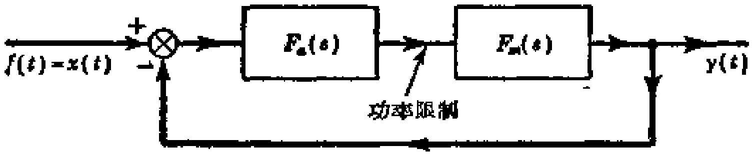



圖 16.6

加到伺服馬達的輸入平均功率由加到伺服馬達裏信號的平均平方表示出來．這個平均功率保持固定值 $\sigma^2$．於是

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{F_a(i\omega)}{1 + F_a(i\omega)F_m(i\omega)}\right|^2\Phi_{ff}(\omega)d\omega. \tag{16.50}$$

利用拉格朗日乘子法．這個以方程(16.50)為拘束條件，求 $\overline{e^2}$ 的極小值問題，可以變成求 $\overline{e^2} + \lambda\sigma^2$ 的極小值問題，$\lambda$ 是放大器的常數．所以求極小的積分是

$$\overline{e^2} + \lambda\sigma^2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{[F(i\omega) - 1][F(-i\omega) - 1]\Phi_{ff}(\omega) + F(i\omega)F(-i\omega)\frac{\lambda\Phi_{ff}(\omega)}{F_m(i\omega)F_m(-i\omega)}\Big\}d\omega, \tag{16.51}$$

其中

$$F(s) = \frac{F_a(s)F_m(s)}{1 + F_a(s)F_m(s)}. \tag{16.52}$$

把方程(16.51)和方程(16.15)的那個積分加以比較．我們看到現在的問題等價於 $F_i(s) = 1$, $\Phi_{fn} = \Phi_{nf} = 0$ 的過濾器問題，等價的噪聲功率譜是

$$\Phi_{nn}(\omega) = \frac{\lambda\Phi_{ff}(\omega)}{F_m(i\omega)F_m(-i\omega)}.$$

被分解的函數 $\Phi(\omega)$ 是

$$\Phi(\omega) = \Psi(i\omega)\Psi(-i\omega) = \left[1 + \frac{\lambda}{F_m(i\omega)F_m(-i\omega)}\right]\Phi_{ff}(\omega). \tag{16.53}$$

根據方程(16.23)，最優過濾器的傳遞函數是

$$F(s) = \frac{1}{\Psi(s)}\left[\frac{\Phi_{ff}(s/i)}{\Psi(-s)}\right]_+. \tag{16.54}$$

除了一個常數 $\lambda$ 而外,方程(16.52)和(16.54)確定了最優放大器的傳遞函數 $F_o(s)$. 這個常數 $\lambda$ 要根據方程(16.50),由功率水準 $\sigma^2$ 來決定.

前面幾段的討論表明許多種類型的問題可以由維納-閣爾莫果洛夫理論解決. 實際上,第 9.12節敍述過的輸入是隨機函數的伺服控制設計問題,也可以用這一理論解決. 對伺服系統的這種應用是第十四章詳細討論過的根據指定積分條件進行設計的另一例子.

只要這種準則能够給出,最優的系統特性就完全確定了. 進一步講,由於所選擇的特殊類型的準則以及控制系統的性質,得出的控制系統是綫性常系數系統,這樣一個關於伺服系統更爲特別的設計概念,比先前幾章討論過的反饋伺服設計原理前進了一步. 勃克森包姆和諾威克(D. Novik)可能是首先提出過濾器理論的這種特殊應用的人[1].

### 16.6 最優檢測過濾器

在很多控制系統中,常常提出這樣的問題:在强烈的噪聲干擾下要把信號 $f(t)$ 探測出來. 在這類問題裏,信號的形狀通常是知道的,所要探測的是當信號達到預期的值 $f(t_0)$ 時,經過的時間 $t_0$. 例如,雷達的情形,我們知道是具有某種固定形狀的脈冲. 問題在於要知道信號什麽時候達到它的最大强度. 假設在 $t_0$ 的時候達到最大値,那末,在時刻 $t_0$ 過濾器應該給出最小的信號變形. 所以最優過濾器必須如此設計,使得經過了過濾作用的信號 $f_0(t)$ 在 $t_0$ 時刻實際上和 $f(t_0)$ 相同. 這裏的拘束條件就是

$$f_0(t_0) = f(t_0) = \text{const}. \tag{16.55}$$

進入過濾器的噪聲是 $n(t)$; 相應的輸出是 $n_0(t)$. 我們希望通過過濾作用後儘可能消除噪聲的影響,這種要求可以寫成

$$\overline{n_0^2(t)} = \min. \tag{16.56}$$

問題是在 $f(t)$ 和 $t_0$, 以及表示噪聲特徵的 $R_{nn}$ 或者 $\Phi_{nn}$ 已給定的情况下,確定過濾器的傳遞函數 $F(s)$, 或者確定過濾器對於單位冲量的反應函數 $h(t)$. 把提出的要求寫成

$$\overline{n_0^2(t)} - 2\lambda f_0(t_0) = \min, \tag{16.57}$$

其中 $\lambda$ 是拉格朗日乘子. 具有普遍形式的這種問題已經由紮第(L. A. Zadeh)和拉格基尼(J. R. Ragazzini)解決了[2]. 下面敍述他們的結果.

如果 $\Phi_{nn}(\omega)$ 能够分解

$$\Phi_{nn}(\omega) = \Psi(i\omega)\Psi(-i\omega), \tag{16.58}$$

其中 $\Psi(s)$ 的極點和零點在左半 $s$ 平面上. 通常我們考慮兩個串聯的放大器,其中一個的傳遞函數等於 $1/\Psi(s)$, 另外一個的傳遞函數等於 $\Psi(s)$ 再把他們和過濾器串聯起來,如圖 16.7. 這一系統和原來的系統等價. 我們用 $F'(s)$ 表示後面兩個傳遞函數的乘積,也就是

$$F'(s) = \Psi(s)F(s), \tag{16.59}$$

它對於單位冲量的反應函數用 $h'(t)$ 表示,加到 $F'(s)$ 的信號用 $f'(t)$ 表示,噪聲用 $n'(t)$ 表

1) A. S. Boksenbom, D. Novik, *NACA TN*, 2939 (1953).

2) L. A. Zadeh, J. R. Ragazzini, *Proc. IRE*, **40**, 1223—1231 (1952).

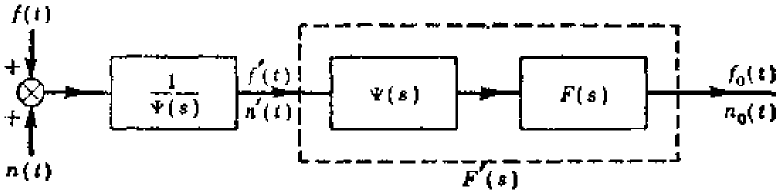



圖 16.7

示。假設 $S(i\omega)$是信號 $f(t)$的富氏變換，也就是

$$S(i\omega)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \tag{16.60}$$

於是

$$f'(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(i\omega)}{\Psi(i\omega)}e^{i\omega t}d\omega. \tag{16.61}$$

根據方程(9.71)，$n'(t)$的功率譜就是

$$\frac{\Phi_{nn}(\omega)}{\Psi(i\omega)\Psi(-i\omega)}=1.$$

所以現在的噪聲是白色噪聲，它的自相關函數是

$$R_{n'n'}(\tau)=\delta(\tau). \tag{16.62}$$

現在系統的輸出可以寫成

$$f_0(t)=\int_0^{\infty} h'(\tau)f'(t-\tau)d\tau, \tag{16.63}$$

以及

$$n_0(t)=\int_0^{\infty} h'(\tau)n'(t-\tau)d\tau. \tag{16.64}$$

噪聲輸出的平均平方就是 $n_0^2(t)$的系集平均值，也就是

$$\begin{aligned}\overline{n_0^2(t)}&=\int_0^{\infty}d\tau\int_0^{\infty}d\tau'\,h'(\tau)h'(\tau')\,\overline{n'(t-\tau)n'(t-\tau)}\\&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}h'(\tau)h'(\tau')R_{n'n'}(\tau-\tau')d\tau\,d\tau'.\end{aligned}$$

但是噪聲 $n'(t)$的相關函數由方程(16.62)給出，因此

$$\overline{n_0^2}=\int_0^{\infty}[h'(t)]^2dt. \tag{16.65}$$

所以利用方程(16.63)和(16.65)可以把方程(16.57)寫成

$$\int_0^{\infty}[h'(t)]^2dt-2\lambda\int_0^{\infty}h'(t)f'(t_0-t)dt=\min, \tag{16.66}$$

但是原來問題中已經給定了 $f(t)$ 和 $\Phi_{nn}(\omega)$，所以 $f'(t)$ 是可以由方程(16.61)計算出來的一個確定的函數。所以方程(16.66)的第二個積分是一個固定的常數。第一個積分是正的或者等於零，因爲要求兩個積分相加起來取極小值，方程(16.66)中第一個積分必須等於零，於是只有假設積分裏方括號內的那些量等於零才行。這樣就得出

$$h'(t)=\lambda f'(t_0-t)\qquad 其中\ t\geqslant 0. \tag{16.67}$$

自然，實際上可實現的系統，當 $t<0$ 時，$h'(t)\equiv 0$. 換句話說，對於正的 $t$, $F'$ 對單位冲量的最優反應函數恆等於 $f'(t)$ 對 $t_0/2$ 點的鏡像. 對於噪聲是白色噪聲的特殊情形，在早些時候這個結果就已經知道了，首先推導出這個結果的是諾斯(D. O. North).

採用方程(16.17)的結果，並且藉助於方程(16.59)和(16.61)，可以把原來問題的最優過濾器傳遞函數 $F(s)$ 直接寫出來：

$$F(s)=\frac{\lambda}{2\pi\Psi(s)}\int_0^\infty dt\,e^{-st}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(-i\omega)}{\Psi(-i\omega)}e^{i\omega(t-t_0)}d\omega, \tag{16.68}$$

其中 $\lambda$ 是根據方程(16.55)的常數 $f(t_0)$ 來確定的，這個結果和方程(16.24)所給出的那個維納的最優過濾器非常相似，實際上我們可以寫成

$$F(s)=\frac{\lambda}{\Psi(s)}\left[\frac{e^{-st_0}S(-s)}{\Psi(-s)}\right]_+, \tag{16.69}$$

其中 $[\ ]_+$ 仍然表示取括號內的函數只有極點在左半 $s$ 平面的那一部分，也就是要使得傳遞函數實際上是可實現的. 方程(16.68)和(16.69)是由紮第和拉格基尼給出的最優檢測過濾器公式. 由於處理的是與另一個系統等價的問題，在那個系統中輸入所包含的噪聲分量是白色噪聲(圖16.7)，所以，理論的推導就被簡化了. 這種辦法對於簡化複雜的最優過濾器問題是非常有效的.

## 16.7 其它的最優過濾器

前面討論的過濾器理論中，基本假設之一是關於信號或者噪聲等隨機函數的平穩性. 如果時間相當長，因爲系統的自然變化，或者由於在系統運轉的時候有目的的加以改變的緣故，平穩性就不見得成立了. 隨機輸入往往只在一定的時間間隔 $T$ 內是平穩的，如果時間間隔比 $T$ 長一些，隨機函數就不再是平穩的了. 所以，假設對於某一平穩隨機函數設計一個過濾器，假設過濾器的特性時間比 $T$ 來得大，實際的性質就會與理論結果不相符合，過濾器的性能也就會非常差. 在這種情況下，把理論上"最優的"過濾器加以改變而採用一個特性時間較短的過濾器會好一些.

一個更爲合適的解答是把時間 $T$ 明顯地包含在我們的理論考慮之內. 我們可以這樣作：我們要求過濾器對單位冲量的反應函數 $h(t)$ 在間隔 $0\leqslant t\leqslant T$ 以外等於零，於是從 $x(t)$ 就可以算出 $y(t)$：

$$y(t)=\int_0^T h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \tag{16.70}$$

這個方程說明這樣的事實，只有從現在起的一段時間間隔 $T$ 內，輸出依賴於輸入. 所以這種過濾器可以叫做有限記憶過濾器. 前面討論過的過濾器相當於 $T\to\infty$ 的情形，是無限記憶過濾器.

紮第和拉格基尼曾經討論過有限記憶過濾器. 他們[1]給出和前面一節類似的檢測問題最優過濾器的解答，他們也給出一個更加複雜的最優過濾器問題的解答[2]，其中輸入信

1) L. A. Zadeh, J. R. Ragazzini, *Proc. IRE*, **40**, 1223—1231 (1952).

2) L. A. Zadeh, J. R. Ragazzini, *J. Appl. Phys.*, **21**, 645—654 (1950).

號包括兩個組成部分，一個平穩的隨機函數和另外一個表示成 $t$ 的多項式的不平穩隨機函數。對於有限記憶過濾器，性能準則是：首先消除平均誤差，其次使得平均平方誤差最小。因為信號中包含不平穩的隨機函數，所以平均誤差不見得自然就會消除。他們所給出這一理論的解答，通常很難用簡單的電阻電容綫路來實現。實際上，甚至於像無窮記憶過濾器那樣比較簡單的問題，由方程(16.68)和(16.69)所給出的解答有時候也難於實現。實際的過濾器只可能近似於理論上最優的過濾器。所以理論上的解答主要在於指導設計，給理想的性能提出一個參考性的標準。

## 16.8 一般的過濾問題

如果我們放棄不完善的電阻電容綫路，而用一個模擬計算機或者甚至於用數字計算機作為過濾器，自然還能够採用複雜的理論上最優的過濾器設計。而且可以達到理論上的最優的性能。可是把一個機械-電子計算機當做元件加到控制系統裏去就大大地增加了整個系統的複雜程度，所以只有在萬不得已的時候才這樣作。如果我們已經使得系統非常複雜，而且付出了很大的費用。我們還是可以懷疑是否真正得到最好的性能。前面幾節討論過的最優性能只是在理論中那些假定的限制條件下"最優"而已。例如，對於兩個有同樣關連函數或者同樣功率譜的隨機信號。根據已有的理論，就要求用相同的過濾器。這在某種意義上，這是對控制性能準則的一定的放鬆。肯定的說，如果我們關於信號的了解除了功率譜以外，還知道更多的統計特性，那末我們將可以區別這兩種信號，並且利用這些更多的知識來改善我們的設計。於是我們能够得到比以前的所謂"最優"過濾器還要好一些的性能。很明顯，解決過濾問題的更一般作法一定要求更高深的概率論知識。最近發展起來的信息論這一門科學也可以在這裏找到很大的用途。在這方面已經開始"概率地"去處理在噪聲中檢測一個信號的問題[1]，但是還留下許多有待於完成。

維納-闊爾莫果洛夫最優過濾器理論是以平均平方誤差這一準則為基礎的。由於採用這一準則，我們基本上是着重於使那些大的誤差較小，而沒有考慮那些小的誤差。但是很多情況下，我們的興趣在於使那些一般的誤差儘可能地小。不只是特別考慮那些不常出現的大誤差。概率分佈函數形狀也可能是不對稱的，平均值離衆數很遠。像這種情況，平均平方誤差準則就完全不適用。作為一個簡單的例子，我們考慮伯德和申南引用過的問題[2]，這個問題是預卜明天是否晴天，因為大多數都是晴天，不可能有負的降雨天去和降雨天相平衡，所以概率分佈函數非常不對稱。以這個分佈函數的平均值為基礎得到的最小平均誤差將表示有小雨的那種天氣。對於準備去野餐的人說來，這樣一種預卜完全沒有任何意義。他的興趣在於知道真正是晴天的概率。因為既使有小雨，野餐也只好作罷。

這一章裏關於最優過濾器理論仍然假定所討論的是綫性過濾器，輸出和輸入的關係

1) 例如．P. M. Woodward, I. L. Davies, *Phil. Mag.*, **41**, 1001—1017 (1950); *Proc. IRE* **39**, 1521—1524 (1951); *J. Inst. Elec. Engrs. London*, **99**, (3), 37—51 (1952); 以及 T. G. Slattery, *Proc. IRE*. **40**, 1232—1236 (1952).

2) H. W. Bode and C. E. Shannon, *Proc. IRE*, **38**, 417—425 (1950).

是用一個常系數綫性微分方程表示的．很清楚，這是一個我們自已加上去的限制，這樣作的目的在於使理論變得簡單，而且這種過濾器可以用電阻電容綫路綜合而成． 對於特性隨時間改變的系統，比如第十三章的火箭導航問題，這種過濾器顯然是不合適的． 在變系數系統的情形，合適的過濾器也必須具有隨時間而變化的特性，如果過濾器仍然是綫性的，那末還可以應用疊加原理，輸出和輸入的關係也還可以通過單位冲量的反應函數來確定．但是這時候的反應函數 $h$ 是兩個變數 $t$ 和 $t^*$ 的函數．$t$ 是系統有反應的時刻，$t^*$ 是冲量作用的時刻，所以輸出 $y(t)$ 可以根據輸入 $x(t)$ 由下列公式算出：

$$y(t) = \int_0^\infty h(t, t-\tau)x(t-\tau)d\tau. \tag{16.71}$$

在這種情形裏，最優過濾器的設計問題就是首先確定 $h(\tau, t)$，然後想辦法實際上找出這種單位冲量的最優反應函數．

# 第十七章

# 自行鎮定和適應環境的系統

前幾章裏，我們已經指出：如何可以設計成功高度複雜的控制系統，使它幾乎能够具有任何一種指定的性能．自然，系統越是複雜，那末由於整個系統的裝配上的差誤，或者因爲個別元件的損壞而發生失靈現象的可能性也就越大．所以，對於複雜的系統，在實際運行中設計的可靠性問題就變得極爲重要了．在這一章和最後一章，我們將以兩種不同的觀點考慮這個問題．

本章裏，我們將討論在系統裏建立可靠的和能適應環境的性能的這種可能性，使得系統在沒有人幫助的情况下，本身能够自動地改正那些設計中偶然的或不能預料到的差誤．控制系統本身就能"理解"如何正確地行動的這種性質（自然這裏的理解二字需要加括號），很像生物的適應性機能，這種機能保證生物在周圍環境變化的情况下能够生存．在複雜的系統裏，自行調整的這一概念是從有關生物的生活狀態的研究中很自然地得出來的，因爲對於生物這種特徵是十分明顯的．在這一章裏，我們的討論是以阿施貝（W. R. Ashby）寫的一本著名的書[1]爲基礎，那本書中研究了關於神經系統產生適應行爲的特獨能力的由來．關於一個動物的腦子到底是如何構成的，對於這個問題可能有不同的看法．但是我們的目的只在於指出利用機械辦法有可能得到適應環境的性能．至於提出來的機構是否是唯一可能的一種，我們就不去考慮了．

### 17.1 自行鎮定的系統

爲簡單起見，我們考慮由兩個變量 $y_1$ 和 $y_2$ 確定的自特系統（在第 10.5 節已經討論過這種類型的系統），相平面就是 $y_1y_2$ 平面．假設 $t$ 表示時間，於是決定系統運動狀態的聯立方程可以寫成

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, y_2; \zeta), \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, y_2; \zeta). \end{aligned}\right\} \tag{17.1}$$

這裏函數 $f_1$ 和 $f_2$ 裏包含着一個外加的參數 $\zeta$，只有當 $\zeta$ 確定的時候，表示 $dy_1/dt$ 和 $dy_2/dt$ 之間的函數關係，以及 $y_1$ 和 $y_2$ 本身才能確定．作爲一種特殊情况，我們讓 $\zeta$ 取一系列離散值．根據點$(y_1, y_2)$的軌跡曲綫就確定了系統的運動狀態的形式，這些軌跡曲綫是由相平面上不同的初始點出發，隨着時間增加而得到的曲綫．很清楚的看到，參數 $\zeta$ 能取多少個不同的值，系統就會有同樣數目的運動形式．例如，在第 10.5 節討論過的綫性系統（相當於 $y_1 = y, y_2 = \dot{y}$）中有參數 $\zeta$，假設 $\zeta$ 能够取五個不同的值，一個是比 $-1$ 小的負數，

1) W. R. Ashby, "Design for a Brain," John Wiley & Sons., New York, 1952.

一個是 −1 和 0 之間的負數，一個等於 0，一個是 0 和 1 之間的正數，還有一個是大於 1 的正數，五個運動形式由圖 10.12 到 10.16 表示出來．現在還可以舉出另外一個例子

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= a_{11}(\zeta)y_1 + a_{12}(\zeta)y_2,\\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}(\zeta)y_1 + a_{22}(\zeta)y_2,\end{aligned}\right\} \tag{17.2}$$

其中系數 $a_{11}, a_{12}, a_{21}$ 和 $a_{22}$ 是 $\zeta$ 的單調函數，於是 $\zeta$ 取多少種不同的值就有多少組不同的系數，每一組系數給出一個一定的運動形式．

如果在相平面上系統所有的運動曲綫趨向某一點（穩定平衡點），那末運動形式是穩定的；如果系統的運動曲綫由平衡點發散出去，系統的運動形式就是不穩定的．滿足需要的系統自然應當是穩定的．如果我們能够使系統自動擯棄那些不穩定的運動形式，而保留穩定的運動形式，那末，就能使系統得到我們所需要的合適的運動狀態．

如果把所需要的系統的平衡點用一個封閉的邊界包圍起來，並且建立一套開關裝置，每當系統的運動曲綫到達邊界上，那末參數 $\zeta$ 就會改換成另外一個不同的值，我們來觀察一下這將會發生什麽情况．假設有像圖 17.1 $(a)$ 表示的一個由 $P_0$ 點開始的運動形式，這是一個不穩定的運動形式，系統將會在 $P_1$ 點和邊界相碰，碰到邊界的狀態就促使開關裝置發生動作，於是 $\zeta$ 跳到另外一個不同的值，系統的運動形式變成 17.1$(b)$ 那樣，這個形式

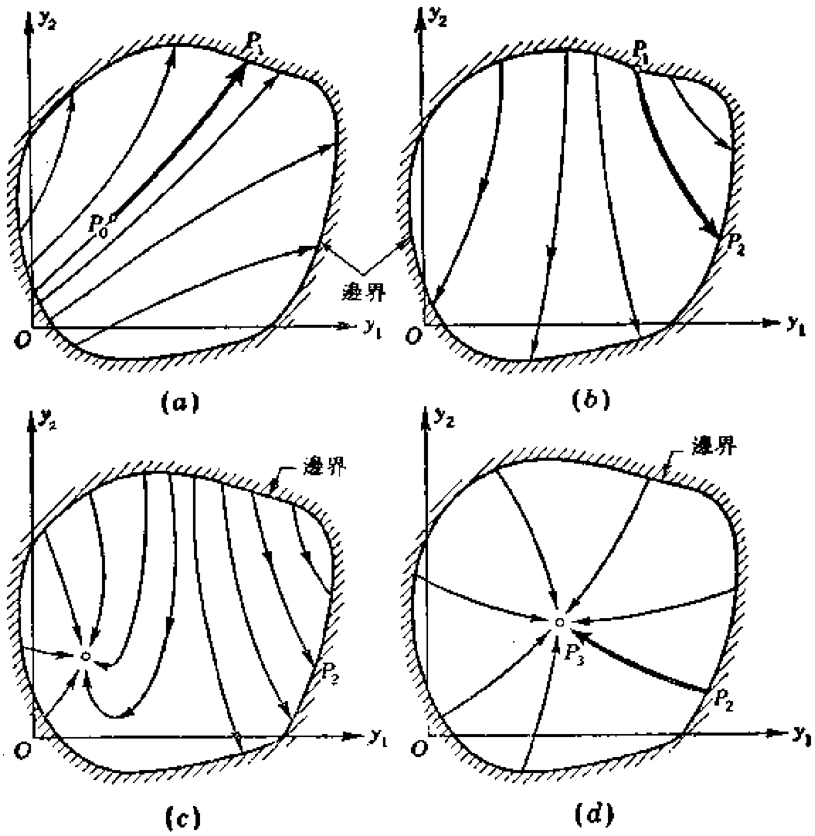



圖 17.1

也是不穩定的，系統從 $P_1$ 點運轉到 $P_2$ 點和邊界相碰，開關裝置又改變 $\zeta$ 的值，運動形式變成圖 17.1($c$)的樣子，其中雖然包含着一個穩定平衡點，但是這時候系統仍然向邊界外面運轉，開關裝置又第三次發生作用，運動形式變成圖 17.1($d$) 表示的那種樣子，系統由 $P_2$ 點運轉到平衡點 $P_3$，這個形式將保留下來，因爲在穩定條件下，系統將不會和邊界相碰，因此開關裝置不發生作用，$\zeta$ 也就不會再改變。

所以，只要加上一套開關裝置和一個事先就規定在相平面裏的開關邊界，系統就自動的摈棄那些不穩定的形式，保留穩定的運動形式，而自動達到穩定狀態． 更進一步，使參數 $\zeta$ 改變的開關裝置，它的作用可以完全是隨機的． 如果開關只動作一次就達到穩定的形式，這當然比較好．但是無論開關作用了一次或者作用了三次，得到的結果總是一樣，終歸能達到穩定狀態．由此可見，我們可以藉助純粹機械的方法產生有目的的運動狀態．這樣的系統自動地達到穩定狀態，它並不是具有那種事先設計好的穩定性，而是通過"理解"而變成穩定的(不言而喻，既使對於每一個藉助於開關裝置而實現的參數 $\zeta$，這個系統總是穩定的．如果系統的結構完全不穩定，也即對於任何一個參數 $\zeta$ 系統都不穩定，那末這種方法就不可能獲得成功)．所以它有着更加高超的穩定性質，在阿施貝的書中把這種系統叫做"自行鎮定的系統"。

我們可以把兩個變量的自持系統推廣到 $n$ 個變量 $y_i$ 的系統，這裏 $i = 1, \cdots\cdots n$． 於是微分方程可以寫成

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, \cdots, y_i \cdots, y_n; \zeta) \qquad i = 1, \cdots\cdots n, \tag{17.3}$$

其中 $\zeta$ 是一個參數． 每當相空間 $y_i$ 裏系統的運動曲綫碰到開關邊界，$\zeta$ 就由原來的值跳到另外一個不同的值．此處的開關邊界是 $n$ 維空間裏的一個 $n-1$ 維超曲面。這樣一個系統也同樣是自行鎮定的系統．

### 17.2 自行鎮定的系統的一個例子

爲了說明自行鎮定的系統的運動狀態，阿施貝做了一個比較簡單的模型[1]．這個模型包含四個變量，四個變量 $y_1, y_2, y_3$, 和 $y_4$ 分別表示四根磁鐵的轉角；磁鐵在運動時受到很大的阻尼，採用四個綫圈去控制每一根磁鐵的位置，通到每個綫圈的電流又分別由四根磁鐵的轉角決定． 因爲阻尼很大的原故，磁鐵的運動相當緩慢，可以把慣性力忽略不計，根據由綫圈產生的那些力矩應該等於阻尼力矩的關係，得到運動方程：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4,\\
\frac{dy_2}{dt} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4,\\
\frac{dy_3}{dt} &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4,\\
\frac{dy_4}{dt} &= a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4.
\end{aligned}\right\} \tag{17.4}$$

1) W. R. Ashby *Electronic Eng.*, **20**, 379 (1948).

方程裏那些系數 $a$ 的大小可以由實驗者用一個可變電位計調節通到綫圈裏的電流加以改變．$a$ 的符號也可以利用安裝在綫圈綫路中的換向器加以改變．此外，對於每一根磁鐵，控制它的位置的四個綫圈中，有一個綫圈的電流經過一個轉換開關，轉換開關共有 25 個可能的位置．每當磁鐵的轉角在正方向或者負方向偏轉到 45° 的時候，轉換開關就隨機地跳到另外一個位置．這樣一來，系數 $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4)$ 中的四個系數，每個都能由四個轉換開關隨機地選取 25 個值中的一個．對於每一根磁鐵，或者說每一個變量 $y_i$，我們可以畫出一個像圖 17.2 那樣的方塊圖．

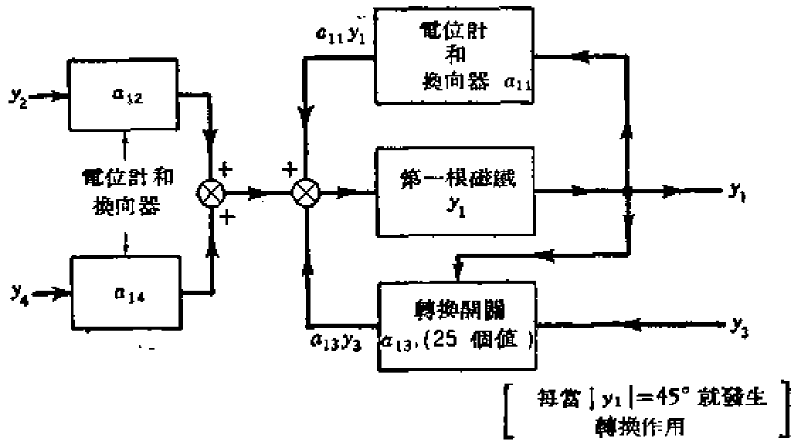


圖 17.2

這裏的開關邊界是四維相空間裏以原點爲中心邊長和90°轉角相應的"立方體"．對於實驗者每給出一次 $a$ 的安排來說，四個轉換開關能够給出被它們決定的 $25^4 = 390,625$ 種四個系數的組合．所以我們用手變動一次可變電位計，這個模型就有 390,625 種運動形式，這些形式中有些是穩定的，有些是不穩定的．不穩定的形式將被自動的擯棄掉．

現在可以把自行鎮定的性質作一個形象化的說明．首先，爲了簡單起見，我們先看一根磁鐵，使它的反饋綫路經過一個轉換開關回到它本身；把其它的綫圈隔斷．圖 17.3 表示這根磁鐵的運動形式．圖中上面的曲綫代表磁鐵的轉角，下面的曲綫表示轉換開關的動作．在 $D_1$，用手撥動磁鐵；但是轉換開關的位置給出一個穩定運動形式，磁鐵就很快地回復到原來的位置．

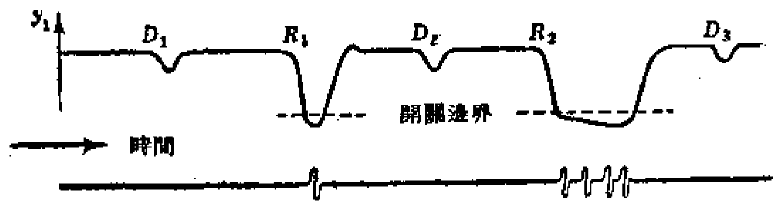


圖 17.3

在 $R_1$，用手把反饋綫路倒轉，現在轉換開關原先的位置使得系統變成不穩定，磁鐵的轉角到達開關邊界(圖中用虛綫表示的部分)．於是轉換開關發生作用，轉換開關跳動一次後，形式變成穩定的，根據在 $D_2$ 時刻加一個外擾所引起的變動得知系統確實是處於穩定狀態中了．在 $R_2$，再用手把反饋綫路倒轉，這時候轉換開關隨機地跳動了四次才使系統達到穩定狀態．在 $D_3$ 系統又是穩定的了．

現在再來討論下面一個例子，這時，有兩根互相影響的磁鐵，分別用 $y_1$ 和 $y_2$ 表示他們的轉角．系數 $a_{21}$ 由實驗者給定，系數 $a_{12}$ 由轉換開關隨機地取值．其餘的系數都取爲零．對於每次給定的一個 $a_{12}$，由於轉換開關能够隨機的取 25 個值中的一個，於是就有 25

種不同的運動形式. 實驗所得的結果用圖 17.4 表示，圖中上面的兩條曲綫分別代表兩根磁鐵的轉角 $y_1$ 和 $y_2$；最底下的曲綫表示轉換開關的動作. 在 $D_1$，轉換開關的位置給出的是一個穩定的運動形式，轉角 $y_1$ 和 $y_2$ 是同方向的. 在 $R_1$，倒轉第 2 根磁鐵的綫圈的極性(通入這個綫圈的電流由第 1 根磁鐵的轉角決定)因而改變了系數 $a_{21}$ 的符號，這時系統就不穩定了，轉角 $y_1$ 到達開關邊界，轉換開關跳動一次後系統又變成穩定的. 在 $D_2$，由一個試驗性外擾表明系統是穩定的，$y_1$ 和 $y_2$ 的方向正如預料那樣是相反的. 在 $R_2$，把 $a_{21}$ 的符號又換成在 $D_1$ 時刻的符號；轉換開關作用後，系統又是不穩定的了. 直到轉換開關跳動三次以後系統才達到穩定. 在 $D_3$，可以看出系統又是穩定的，$y_1$ 和 $y_2$ 偏轉的方向相同.

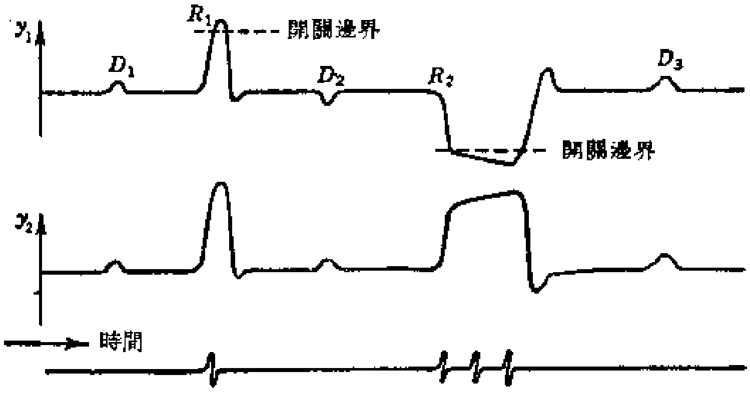



圖 17.4

最後舉一個例子說明，甚至於直到系統設計成功後都未曾預料到的情況發生時，自行鎮定的系統也會自動的適應環境. 我們考慮圖 17.5 表示的具體過程. 這裏有三根互相影響的磁鐵分別用 $y_1$, $y_2$ 和 $y_3$ 表示他們的轉角. 在 $D_1$ 的情形表明，最初系統是穩定的. 轉角 $y_1$ 和 $y_3$ 方向相同，但是 $y_2$ 的方向和他們相反. 現在在時刻 $J$，我們使模型遭到一種新的，沒有預料到的情況；我們把第一根磁鐵和第二根磁鐵連系在一起了. 這樣一來他們轉動的方向就必須永遠一致. 加入這種限制以後，轉換開關的動作情況和以前可能的動作情況有所不同. 兩根磁鐵連在一起以後，系統變成不穩定了，結果轉角增大使轉換開關發生作用，一連瀏覽三個不穩定的運動形式才達到穩定形式，如 $D_2$ 所示. 在 $R$，把第一根和第二根磁鐵間的聯系解除掉，系統又變成不穩定的，這時就又要求轉換開關發生新的動作.

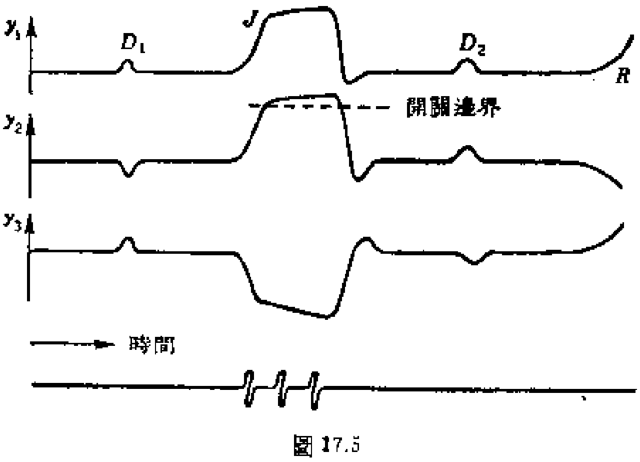



圖 17.5

## 17.3 穩定的概率

前面一節，我們已經說明自行鎮定的系統在某些情況下尋找穩定形式的那種具有適應能力的特徵. 自然會發生下面的問題：關於穩定的尋求是否總能成功呢？成功的概率等於多少？ 如果我們考慮方程(17.3)所確定的那種具有 $n$ 個變量的自持系統，離散參數

$\zeta$ 的每一個值給出一個普通的動力系統，於是和所有 $\zeta$ 值對應的那些 $n$ 個變量的自持系統組成一個系集． 我們可以在帶有開關邊界的相空間裏把穩定的概率確定如下：在相空間裏取一點 $P(y_i)$，考慮圍繞着 $P$ 點的一個無窮小鄰域 $dV$，在上述動力系統組成的系集裏具有穩定平衡點在體積 $dV$ 中的百分數是 $dp$． 在開關邊界圍繞的相空間內求 $dp$ 的積分，這樣就給出對應於特定的開關邊界的系統穩定的**一般概率** $p$．

不言而喻，真正要計算這個穩定的一般概率是一個非常困難的數學問題，爲了得到關於這個概率的一些了解，阿施貝對下面一類綫性系統的系集做了一些實驗分析

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j \qquad i=1,\,2,\,\cdots\cdots,\,n \tag{17.5}$$

這裏只有原點是一個平衡點．必須研究下面的行列式方程才能解決系統的穩定問題，

$$|a_{ij}-\delta_{ij}\lambda|=0, \qquad \begin{aligned}&\delta_{ij}=1,\text{ 當 } i=j,\\&\delta_{ij}=0,\text{ 當 } i\neq j.\end{aligned} \tag{17.6}$$

假設所有的根 $\lambda$ 的實數部分都是負實數，那末系統就是穩定的． 通常這些根 $\lambda$ 稱爲方陣 $a_{ij}$ 的特徵根．在系集裏有些方陣的全部特徵根實數部分都是負實數，這種方陣出現的概率等於系統穩定的概率． 阿施貝考慮了最簡單的分佈，即均勻分佈的情形，具體地說，就是方陣 $a_{ij}$ 中每個元素以同樣的可能性取包含在 $-9$ 到 $+9$ 之間的每一個整數值．一般說來，可以藉助於記載隨機數目的表來完成選取 $a_{ij}$ 的值． 當 $n=1$，穩定的概率顯然等於 1/2． 對於其它階數的系統，阿施貝利用胡爾維茨(A. Hurwitz)的規則[1] 試驗穩定情況． 他所得到的結果列在表 17.1 內． 可以看出穩定的概率爲隨着系統階數的增加而逐步減少．這個概率近似地等於 $1/2^n$．

如果我們對 $a_{ij}$ 加上某些適當的限制，那末穩定的概率就會增大． 例如，我們使方陣對角綫上的元素等於零，或者等於負數，假設變量之間互相不發生影響，那末系統就總是穩定的．對於一個變量，或者 $n=1$ 的系統，穩定的概率顯然等於1． 當 $n=2$，概率等於 3/4．把阿施貝的實驗結果列在表 17.2 內．

表 17.1

| $n$ | 試驗次數 | 找到穩定的次數 | 穩定的百分比 |
|---|---|---|---|
| 2 | 320 | 77 | 24 |
| 3 | 100 | 12 | 12 |
| 4 | 100 | 1 | 1 |

表 17.2

| $n$ | 試驗次數 | 找到穩定的次數 | 穩定的百分比 |
|---|---|---|---|
| 2 | 120 | 87 | 72 |
| 3 | 100 | 55 | 55 |

由表中看到穩定的概率增大了一些，但是無論如何，當變量的數目增加的時候，穩定的概率就一定會減小．從這些研究材料中，得出下面的結論：系統穩定的概率將隨着系統逐漸變復雜而按一定的規律逐漸減小．那些龐大的系統不穩定的可能性就比穩定的可能性大．

## 17.4 終點場

按照阿施貝的作法，對於某個給定的參數值 $\zeta$ 所得到的運動形式我們都給它一個固

1) A. Hurwitz; *Mathematischen Annalen*, **46**, 273 (1875).

定的名稱，把相空間裏的運動形式稱爲運動狀態曲綫場．這種場隨着參數的改變而有所不同．經過開關作用後與某個參數值對應的最後的穩定場稱爲終點場．這樣一來，求出到達終點場所必須的開關動作次數的平均數 $N$，就非常重要．這個數目 $N$ 和自行鎮定系統穩定的概率 $p$ 之間有簡單的關係．開關第一次作用後能達到終點場的概率顯然就等於 $p$．沒有達到終點場的概率是 $q=1-p$．假設開關完全隨機地起作用，於是第二個場（第二次開關作用後得到的場）是穩定的概率仍然等於 $p$，不穩定的概率仍然等於 $q$．所以第二個場達到終點場的條件概率等於 $pq$；而第二個場仍然不是終點場的概率等於 $q^2$．以此類推，我們知道開關作用 $m$ 次以後才達到終點場的條件概率等於 $pq^{m-1}$，達到終點場所必須的開關作用次數的平均數 $N$ 就是

$$N=\frac{\sum_{m=1}^{\infty} mpq^{m-1}}{\sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1}}=\frac{(1-q)^{-2}}{(1-q)^{-1}}=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{p}. \tag{17.7}$$

如果 $p$ 非常小，對於那些龐大的系統來說，達到終點場的開關動作次數的平均數 $N$ 就非常大，這樣看來，因此就需要經過一段漫長的過程，需要很長的時間才能找到終點場．

在一個場裏，如果只有很小一部分運動形式曲綫趨向平衡點，而其它的曲綫將從平衡點散開去碰到開關邊界．這種特殊的場可以稱爲奇異終點場．只有從開關邊界出發的運動曲綫恰好就是上述能趨向平衡點的那些少數的曲綫中的曲綫，這個場才是終點場．下面我們就會看到，這種奇異終點場是不好的場．假設一個自行鎮定系統所有可能出現的場中，有一部分是奇異終點場，這一部分場成爲終點場的可能性非常小，爲了說明這一點，我們再進行一些分析．開關邊界曲面上總有這樣的部分，從這部分出發的運動形式曲綫趨向平衡點．設這部分面積和整個開關邊界曲面面積的比值是 $k$，例如圖 17.1($a$)和($b$)表示的那兩個場 $k=0$，圖 17.1($c$)表示的場中，$k$ 差不多等於 1/2．圖 17.1($d$)表示的場，$k=1$．自行鎮定的系統所有可能的那些場中，如果有 $k$ 在 $k$ 到 $k+dk$ 之間的百分數等於 $f(k)dk$．$f(k)$ 就是自行鎮定的系統可能有的場的分佈函數，按照定義

$$\int_0^1 f(k)dk=1. \tag{17.8}$$

因爲只有那些從開關曲面上 $k$ 那一部分出發的運動曲綫才可以產生一個終點場．於是 $k$ 在 $k$ 與 $k+dk$ 之間產生終點場的條件概率等於 $kf(k)dk$．由此可知，終點場的分佈函數 $g(k)$ 和自行鎮定的系統可能有的場的分佈函數關係如下：

$$g(k)=\frac{kf(k)}{\int_0^1 k'f(k')dk'}. \tag{17.9}$$

顯然

$$\int_0^1 g(k)dk=1. \tag{17.10}$$

如圖 17.6 所畫的那樣，終點場的分佈集中在那些 $k$ 值較大的地方，因此，$k$ 很小的奇異終

點場是不好的場.

然而，眞正的終點場的分佈與公式(17.9)得到的那種可能的終點場的分佈並不相同.其原因在於：系統的平衡狀態會遭到一些隨機干擾的作用，如果相空間裏的平衡點靠近開關邊界，那末即使相當微小的干擾也會使系統的瞬時狀態跑過邊界，而把原來的場破壞掉．所以，有隨機干擾作用的時候，如果一個終點場保持穩定狀態的概率很大，那末平衡點必須在開關邊界內靠近中心的地方．例如圖 17.7 的三個場中，$c$ 場就比 $a$ 場和 $b$ 場來得穩定一些．其中 $b$ 場同時包含一個不穩定的平衡點和一個極限環綫.

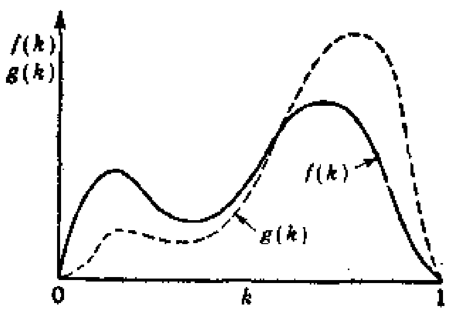


圖 17.6

為了把這樣一個在隨機干擾作用下的穩定性概念表達成定量的形式．我們引入在一個干擾作用後終點場保持不變下的概率 $\sigma$． 如果場裏只包含一個穩定平衡點 $P$，如圖 17.7，並且假設干擾使系統由 $P$ 點離開的分佈函數已經確定(譬如說按照一個高斯分佈)，

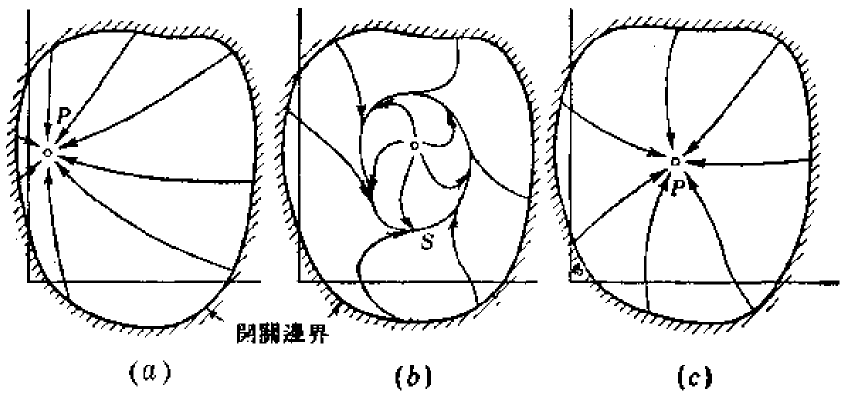


圖 17.7

那末，把這個分佈函數在相空間中開關邊界所包圍的區域內求積分，就得到 $\sigma$． 如果終點場包含一個極限環綫 $S$，那末，把極限環上的每一點先看作是一個平衡點，然後按照穩定平衡點的辦法求出相當的概率，最後根據系統將在這些點耗費的時間的比例，求出這些概率的平均值 $\sigma$，這個平均值 $\sigma$ 就是場保留下來的概率． 我們可以認為每一個終點場都有一個這樣的概率 $\sigma$． 用 $\varphi(\sigma)$表示終點場在 $\sigma$ 的概率分佈函數；也就是 $\sigma$ 在 $\sigma$ 到 $\sigma+d\sigma$ 之間找到一終點場的概率等於 $\varphi(\sigma)d\sigma$．顯然

$$\int_0^1 \varphi(\sigma)d\sigma = 1. \qquad (17.11)$$

用 $\psi(\sigma)$表示眞正的終點場的分佈函數，

$$\int_0^1 \psi(\sigma)d\sigma = 1. \qquad (17.12)$$

我們將藉助於 $\varphi(\sigma)$來計算 $\psi(\sigma)$．我們既然假定 $\psi(\sigma)$是眞正最後終點場的分佈函數．這

個分佈函數將不會因爲隨機干擾的作用而有所改變．此外，在一個隨機干擾作用以後，有值 $\sigma$ 在 $\sigma$ 到 $\sigma + d\sigma$ 之間而百分數是 $\psi(\sigma)d\sigma$ 的場，保留下來的概率等於 $\sigma$，遭到破壞的概率等於 $1-\sigma$．由於一個隨機干擾的作用，而被破壞掉的場的總百分數是

$$\int_0^1 (1-\sigma)\psi(\sigma)d\sigma.$$

新的終點場根據可能的終點場的分佈而決定；也就是根據 $\varphi(\sigma)$．所以在一個隨機干擾作用後，在 $\sigma$ 到 $\sigma + d\sigma$ 中間終點場的總百分數等於

$$\sigma\psi(\sigma)d\sigma + \varphi(\sigma)d\sigma\int_0^1 (1-\sigma')\psi(\sigma')d\sigma'.$$

因爲隨機干擾不會影響最後的分佈 $\psi(\sigma)$，所以上面的數目和 $\psi(\sigma)d\sigma$ 成正比．如果 $C$ 代表比例常數，那末

$$C\left[\sigma\psi(\sigma) + \varphi(\sigma)\int_0^1 (1-\sigma')\psi(\sigma')d\sigma' = \psi(\sigma).\right.$$

把這個公式的兩端從 $\sigma = 0$ 到 $\sigma = 1$ 對 $\sigma$ 求積分，根據方程(17.11)和(17.12)就可知道 $C$ 等於 1，所以我們得到

$$\sigma\psi(\sigma) + \varphi(\sigma)\int_0^1 (1-\sigma')\psi(\sigma')d\sigma' = \psi(\sigma).$$

上面方程裏的積分是一個與 $\sigma$ 無關的常數．可以看出 $\psi(\sigma)$ 和 $\varphi(\sigma)/(1-\sigma)$ 成比例關係，或者，由方程(17.12)得到

$$\psi(\sigma) = \frac{\varphi(\sigma)}{(1-\sigma)\int_0^1 \frac{\varphi(\sigma')d\sigma'}{(1-\sigma')}}. \tag{17.13}$$

根據方程(17.13)可以由可能的終點場的分佈函數得到眞正的終點場的分佈函數．因爲可能的終點場的分佈，可以通過計算系統裏所有可能得到的場的分佈，利用方程 (17.9) 求得．我們至少能够在理論上根據自行鎮定的系統的特性得到眞正終點場的分佈．方程 (17.13) 表明，眞正的終點場的分佈 $\psi(\sigma)$ 與 $\varphi(\sigma)$ 比較起來更加集中在那些 $\sigma$ 的值大的地方．這一事實從圖 17.8 中可以清楚的看到，同時也是我們在以前的直觀的討論中所預料到的．我們需要注意，特殊類型的隨機干擾，將僅僅影響分佈函數 $\varphi(\sigma)$ 的計算．至於方程(17.13)所確定的 $\varphi(\sigma)$ 和 $\psi(\sigma)$ 之間的關係不會因干擾的類型不同而有所改變．

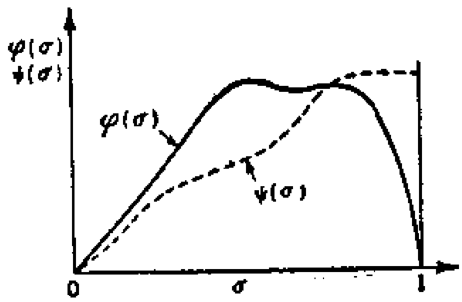



圖 17.8

## 17.5 適應環境的系統

前一節已經說明，達到一個終點場需要開關作用的次數 $N$ 等於 $1/p$，這裏，$p$ 是一個自行鎮定的系統那些場穩定的一般概率．因爲我們已經知道對於龐大的系統來說，$p$ 減低成非常小的數值，因而 $N$ 就很大，比如說，假設系統包含 100 個變量，$p \approx 1/2^{100}$，$N = 2^{100} \approx 10^{30}$．即使我們使得開關每秒鐘動作十次，達到終點場所需要的時間仍然要等於 3 ×

$10^{19}$ 個世紀，如此長的時間完全可以認為是無窮大的．因此實際上自行鎮定的系統將永遠達不到終點場．所以對於系統很龐大的情況，同時也正是自動尋求穩定狀態的原理處於重要地位的情況，我們却發現這個概念是不現實的．

為了彌補上述的缺陷，我們必須使系統穩定的概率加大．可以採取一個折衷的辦法．我們按照下面的方式進行設計，系統的場限制是那些在希望的運轉條件下穩定的場．只有局部和少量地方才需要開關作用來調整．換句話說，我們根據普通的方法來設計系統而不採用自行鎮定這種原理．只有當預先估計會有擾亂的時候才採用新的原理和開關裝置．例如，我們可以根據前面幾章討論過的原理，設計一套自動駕駛飛機的裝置．但是我們有一個顧慮，整套機械可能使自動駕駛裝置傳送到副翼上的信號發生錯誤，以致要求副翼向下的信號實際上產生副翼向上的運動．假設機械果真產生了這種錯誤，於是自動駕駛裝置就不能使飛機穩定，自動駕駛着的飛機這一系統也就不穩定了，飛機就要發生旋轉運動．但是，如果恰好在這一點上採用自行鎮定的原理，那末就可以消除設計者的顧慮了．當飛機旋轉超過預定值，而碰到開關邊界的時候，開關就自動地發生作用．這時系統就是包含兩個場（一個穩定的場和一個不穩定的場）的自行鎮定的系統了，無論自動駕駛的飛機這一系統中可能有許多個變量，但是開關頂多動作一次就達到穩定．這裏所採取折衷辦法的主要看法是：並不讓每一個變量都隨機地變化．差不多所有的條件下，我們可以有運轉穩定的設計，由於需要考慮的只是那些預料可能發生的偶然事件，這樣就大大的減少了關於表示系統行為的場的選擇．因此，這是介於一般控制設計原理和自行鎮定原理之間的一種折衷辦法．

對於生物來說，不可能預先假定周圍是什麼樣的情況，所以要想限制系統性能的場的選擇而增加穩定的概率是辦不到的．阿施貝發現另一種增加穩定概率的途徑．他對一個非常複雜的，包含着很多變量的系統進行觀察，結果發現某一種干擾或者運轉條件的變更只直接影響這些變量中相當少的若干個變量．這樣，假設直接受到擾動的這些變量可以其它變量分離開來，把他們組成一個自行鎮定的系統，那末，對於那些特殊類型的干擾，穩和定的概率可以大為增加．例如在這一節第一段的討論中，假設直接受到干擾的變量，不是原來的一百個，而是五個，如果開關每秒鐘動作十次，那末預料達到終點場的平均時間只是 3.2 秒．這樣一來，假設 100 個變量可以分成 20 組，每組有五個變量，分為形成二十個自行鎮定的系統，那末要求完全適應一個新的運行條件的時間總數只是 $20 \times 3.2 = 64$ 秒．對於一個包含一百個互相有關聯的變量的自行鎮定的系統來說，從 $3 \times 10^{19}$ 世紀變為 64 秒，這的確是一個驚人的改進！

自然，由 20 個不同的系統（每個系統各包含五個變量）組合而成的一個系統，就不如一個包含 100 個變量而變量之間互相有影響互相有關聯的系統那樣靈活，也不會有那樣好的反應．但是，如果某種干擾只直接作用到五個變量，因為我們可以適當地按照干擾的性質進行變量的組合，使得每一個干擾都只影響到某一個子系統的五個變量，於是有五個變量的 20 個子系統組成的大系統和具有 100 個變量的系統是等價的．假設，受到干擾的變量是 $y_1, y_2, y_3, y_4$ 和 $y_5$，於是這五個變量結合而成一個具有五個變量的自行鎮定的系

統. 如果又有一個干擾作用於變量 $y_2, y_5, y_{10}, y_{98}$, 和 $y_{99}$, 於是這五個變量也結合成一個自行鎮定的系統。這種根據運轉條件不斷地改變系統變量的組合而形成各種子系統的現象,阿施貝稱之爲運動狀態的分散現象. 當點($y_1, y_2, \cdots, y_n$)在相空間內某一定範圍的時候,使方程 (17.3) 中函數 $f_i(y_1, y_2, \cdots, y_n; \zeta)$等於零,就可以眞正作到運動狀態的分散. 這時那些 $y_i$ 是時間的常數函數,實際上只是其它變量的參數而已. 在我們上面提到的例子中,對於第一個干擾來說,點($y_1, y_2, \cdots, y_n$)在相空間中某一個區域內,除了 $i = 1, 2, 3, 4, 5$ 以外 $f_i$ 都等於 0. 對於第二個干擾來說除了 $i = 2, 5, 10, 98, 99$ 以外,其餘的 $f_i = 0$. 很明顯,函數 $f_i$ 的這種運動狀態只是意味着對於各個微商 $dy_i/dt$ 來說存在着各種閾限. 在實際的系統裏這種閾限自然是可以預料到的. 因此分散的現象是不難作到的.

阿施貝把具有分散現象的自行鎮定的系統叫做適應環境的系統. 一個適應環境的系統自然具有能適應環境的性能,因爲它由自行鎮定的子系統組成. 它和有同樣多個變量的自行鎮定的系統不同的地方在於達到終點場的時間不一樣. 適應環境的系統達到穩定所需的時間比較起來是短得多的,因此就使得自行鎮定的原理實際上能够實現. 而且,一個適應環境的系統,對接連出現的干擾的反應是接連的嘗試性的變化着適應,這種系統表示逐步理解的過程,或者繼續適應的過程. 這是在生物中經常可以看到的特徵. 更進一步,因爲對於一個干擾的第二次以及以後的適應必然會改變系統的參數. 與第一個干擾恆等的干擾重覆出現時,一般說來系統不再產生第一次所適應的狀態,這是眞正地運動狀態地分散現象,換句話說,系統變得更"老練"更"聰明"了,現在它不止能够抵抗那一個主要的干擾,而且還能適應更多的運轉條件了.

# 第十八章

# 誤差的控制

在上一章裏，我們已經介紹了自行鎮定的原理：由於有一個簡單的裝置，每當系統處於不穩定的時候，這個裝置就會改變系統的性能，使系統能够不受那些偶然的誤差以及元件發生無法預料的失效現象的影響．因爲一個自行鎮定的系統能够自動地達到穩定狀態，所以，設計這種控制系統的時候，實際上，那些不穩定的運動狀態場和那些穩定的運動狀態場同樣地被引進系統中來了．換句話說，在設計一個自行鎮定的系統的過程中，我們並不企圖把穩定性和不穩定性區分開來，也不設法把錯誤的運動狀態場與正確的運動狀態場加以區分．在那裏，我們只是從概率的觀點處理運動狀態的誤差，並沒有採用其它的處理方法．本章中，我們將從另外一種不同的觀點討論一個複雜系統的可靠性問題．我們將要故意把誤差引入系統中，然後提出問題：系統應該如何設計才能使系統可以不顧誤差的影響而還可以給出合適的性能．那就是，我們希望知道如何控制誤差．

關於控制誤差的問題現在還處於發展的初期．目前還只能對那些最簡單的作用關係討論誤差的控制，現在的理論全都是由馮・諾伊曼(J. von Neumann)[1]提出來的．我們這一章的討論是馮・諾伊曼工作的一個說明．這樣作的目的在於引入這個非常重要的題目，並且指出需要在這方面進行更進一步的研究．

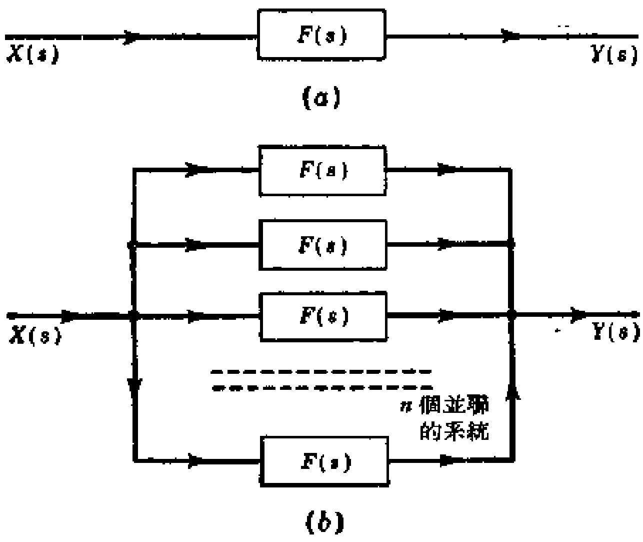



圖 18.1

## 18.1 用加倍的辦法改進可靠性

根據一般的常識，用簡單的加倍辦法常常可以增加系統的可靠程度．例如，以圖 18.1($a$)所表示的系統而論，假設它有這種特性：如果它的運轉失效僅僅是沒有輸出而已，這時爲了保證系統有較小的失效概率，我們用加倍的辦法可以把同樣的系統並聯起來，如圖 18.1($b$)．假設原來系統失效的概率等於 $p$（$p$ 是一個在零與 1 之間的數目），於是在並聯的系統中每一個單元失效的

1) J. von Neumann, "Probabilistic Logics and the Synthesis of Reliable Organisms from Unreliable Components", 這是作者在美國加省理工學院 (California Institute of Technology) 作過的一篇講演的印本，出版於 1952 年，現已收入下列文集中："Automata Studies" Princeton Univesity Press, Princeton, N. J. (1956) (這個文集已有俄文譯本 [60]).

概率也是 $p$. 如果並聯而成的系統中,各個單元相互無關,只有當每一個單元都失效的時候並聯而成的系統才會失效. 並聯而成的系統失效的概率於是就等於 $p^n$. 使倍數 $n$ 增加,我們就可以使得這個概率非常小。

但是,一般說來,控制系統中的某一個元件的失效,並不使它的輸出等於零. 與上一段的情形相比較,這時的失效影響會更壞些,這時系統仍然還有一個輸出,但是這是個錯誤的輸出,因此,像上面談到的加倍方法,就不可能解決問題,因爲一個錯誤的信號混雜在正確的信號中其結果仍然是錯誤信號. 因此,對於妨止失效說來,如果系統中有這種失靈情況,並聯而成的系統失靈的概率和單獨一個系統失靈的概率相等;結果,可靠性並沒有得到改善. 所以誤差的控制問題並不像最初想像那麼簡單而是一個比較深刻、比較困難的問題. 雖然如此,以後還會看到,加倍的原理,也即需要增加元件數目這一原理仍然是基本的想法. 主要的問題在於如何把這些元件按新的方式組合起來才能有效地控制誤差,因爲像 18.1($b$)那樣簡單的並聯組合並不總是有效的.

## 18.2 基本元件

爲了分析起來簡單起見,我們不來討論輸入和輸出都是連續變數的情形,我們選擇一個簡單的元件作爲對象,它的輸出和輸入只可能取兩個離散值: 0 或者 1, 也就是說,輸入或者是"開"(激發)或者是"關",輸出或者是"開"(激發)或者是"關". 這時,元件的特性由輸入和輸出的關係所決定. 此後我們總是假定元件只能有一個輸出,但是可以有幾個輸入. 這裏輸出和那些輸入之間也可以有一個時滯,這裏,時滯的意義是說:輸入激發後,一定要經過一定的時間輸出才激發。所以,這樣一種元件具有繼電器綫路的性質.

爲了描述元件的特徵,我們引入四種類型的輸入: 刺激輸入; 抑制輸入; 恆定刺激輸入;以及一類永不起作用的輸入,也就是接地輸入. 它們是用圖 18.2 的符號表示的. 這裏,用一個圓圈表示元件,輸入畫在圓圈的左端,輸出畫在圓圈的右端. 而且在圓圈中間有一個數字 $k$, $k$ 的意義就是: 起刺激作用的輸入的數目必須至少比起抑制作用的輸入的數目多 $k-1$ 個, 系統的輸出才是開. 圖 18.3($a$)所表示的元件,只有當輸入 $a$ 和 $b$ 都是開的時候, 輸出才是開, 這可以叫做 $ab$ 元件. 圖 18.3($b$)表示另一個元件,如果輸入 $a$ 和 $b$ 之中有一個是開那麼它的輸出是開, 這可以叫做 $a+b$ 元件. 圖 18.3($c$)表示只有當輸入是關的時候輸出才是開的元件, 可以叫做 $a^{-1}$ 元件. 如果我們考慮的輸入是表示某個斷言是正確(開)還是不正確(關)的條件,那末,圖18.3 的三個元件恰好表示布爾 (Boole) 代數的三個基本運算 (這些元件有時候也叫做基本邏輯元件). 在一個採用二進位制的數字計算機中,這些元素是運算的基本元件. 如果計算運算中需要記憶裝置,這種裝置可以由圖 18.3 的元件經過反饋而得到,如圖 18.4 那樣. 原因是這樣的:

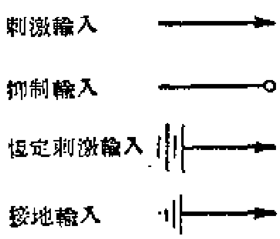


圖 18.2

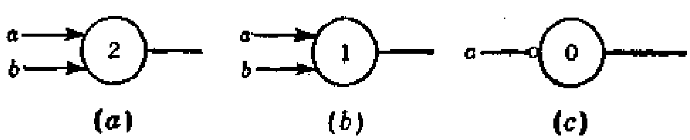


圖 18.3

輸入 $a$ 激發了一次以後，不論在下一次運算中 $a$ 是開還是關，輸入總是開的．

對於以後的討論來說，同時用三種基本元件去處理問題有些不方便． 但是，所有這三種元件實際上是一種基本元件的特殊情形． 考慮圖 18.5 所表示的謝弗元件(Scheffer stroke)． 因爲兩條恆定刺激輸入綫是一直起作用，我們可以把他們從圖中去掉，把謝弗元件用下面的圖表示． 輸出在這樣的情形下是開，如果 $a$ 和 $b$ 都不是開，或者 $a$, $b$ 中有

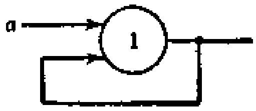
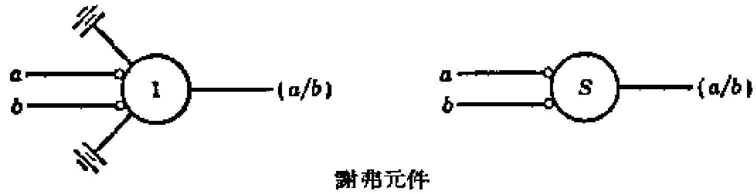



圖 18.4




謝弗元件

圖 18.5

一個是開，輸出就是開的． 但是如果 $a$ 和 $b$ 都開那麽輸出就是關． 上一段談到的三個基本元件可以用謝弗元件按圖 18.6 的方式構成． $ab$ 元件和 $a+b$ 元件都包含兩個串聯的謝弗元件；所以這兩種元件的時滯自然等於那種只包含一個謝弗元件的 $a^{-1}$ 元件的時滯的兩倍． 但是因爲我們對於時滯的瞭解只在於指出輸入的作用先於輸出若干時間，時滯眞正的大小並不重要．因此，我們把只在時滯的大小上有差別的運算考慮作等價的運算．所以這三種運算全都可以用一種簡單的謝弗元件表示．

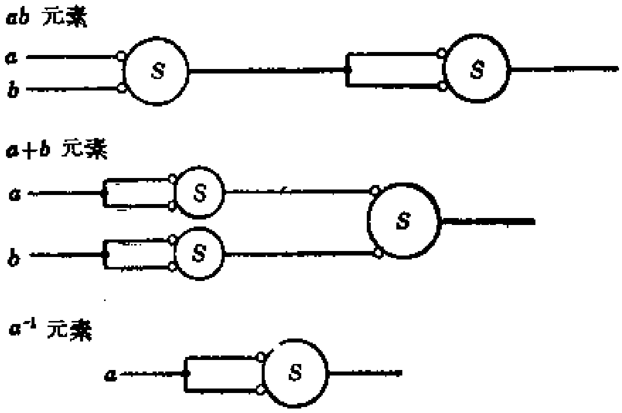



圖 18.6

關於基本元件的選擇方法自然並不是唯一的．除了謝弗元件外還可以選用其它的元件． 但是，我們選擇了謝弗元件，可以使以後的討論方便．我們將首先考慮用謝弗元件表示的一個運算中的誤差控制問題；然後，由謝弗元件組成的任何複雜運算也可以類似地進行設計．

## 18.3 複合方法

利用增加元件數目來改善可靠性的這一個概念，我們用包含有 $n$ 根輸入的一束輸入代替一個輸入． 這樣一來，在單獨一個謝弗元件的系統中，對於 $a$ 輸入綫我們將有 $n$ 根綫，寫作 $a_i$，其中 $i=1, 2, \cdots, n$；對於 $b$ 輸入綫也有 $n$ 根，寫作 $b_i$，其中 $i=1,2,\cdots,n$；輸出也是有 $n$ 根的一束綫，然後我們規定一個分數 $\delta$, $0<\delta<\frac{1}{2}$，如果輸出綫束中超過 $(1-\delta)n$ 根綫是開(或者關)，我們就認爲從整體來看輸出就是開(或者關)． 如果輸出綫束中有不到 $\delta n$ 根綫是開(或者關)，作爲一個整體來看就被考慮爲關(或者開)．其他任何中間情況都當做是失靈現象． $\delta$ 就是置信水平．問題在於如何利用謝弗元件組成一個系統，當輸入綫束中誤差的概率一定，以及單獨元件發生失靈現象的概率一定的時候，可以使得整個系統發生失靈的概率減小．

作爲問題的初步處理,我們從輸入綫束 $a$ 中取出一根綫 $a_i$,從輸入綫束 $b$ 中取出一根綫 $b_i$,把這兩根綫當做一個謝弗元件的輸入綫. 系統的組成情况像圖18.7那樣. 很明顯,

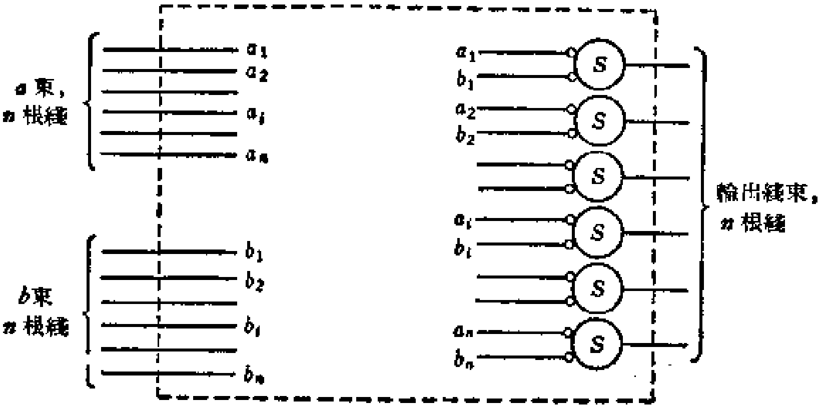



圖 18.7

如果兩束輸入綫中差不多所有的綫都是開,那末輸出綫束中差不多所有的綫都是關. 如果兩束輸入綫中差不多所有的綫都是關,那末輸出綫束中差不多所有的綫都是開. 這樣一個總的運轉狀態看起來似乎是合乎需要的,但是更仔細的考慮一下就會發現實際情况並不是像上面所說那樣. 因爲,如果要求謝弗元件的輸出是關,那末兩根輸入綫都必須是開才行. 在 $a$ 束或者 $b$ 束中發生一個誤差將使得輸出綫束中也產生一個誤差. 所以,對於輸出是關的情形來說在輸出綫束中產生的誤差相當於輸入綫束中所產生的那些誤差的總和. 同樣,在只有一根輸入是關而輸出是開的情况下,輸出綫束中所產生的誤差和輸入綫束中產生的誤差相等. 在兩根輸入綫都是關而輸出是開的情况下,只有兩束輸入綫束同時產生誤差那末輸出才產生誤差;所以,輸出綫束發生誤差的情形比較輸入綫束發生誤差的情况要少. 因此,輸出的誤差和輸入的誤差並不是一致,有時誤差增加,也有時誤差減少. 於是,就發生了誤差的分散情况. 這是我們所不希望發生的情况,因爲誤差的分散現象會使得輸出綫束中激發綫的數目在 $\delta n$ 根綫和 $(1-\delta)n$ 根綫這個區域中間,這樣一來就增加了系統運轉失靈的機會.

爲了抵制誤差的分散現象,我們按照以下的方式引入系統的一個復原機構,我們從圖18.7所表示的執行機構中("執行"的意思就是整個系統的這種用謝弗元件表示的運算方式)取出每一根輸出綫,然後把它分成兩根綫,於是我們得到了 $2n$ 根綫,然後,再把這 $2n$ 根綫排列起來,排列的次序是隨機的. 相繼取出一對對的綫來,把這樣的每一對綫作爲一個謝弗元件的輸入,於是我們又得到包含有 $n$ 根的一束輸出綫. 這種作法用圖表示成圖18.8的樣子. 如果原來的綫束中有 $\alpha_0 n$ 根激發綫,那末,在統計的意義上輸出中未激發綫所佔的百分數是 $\alpha_0\alpha_0=\alpha_0^2$. 輸出中激發綫所佔的百分數就是

$$\alpha_1 = 1-\alpha_0^2. \tag{18.1}$$

假設開初的那些綫中激發的概率是 $\alpha_0$,那末,只要 $n$ 很大,使得變換後的激發綫的概率就是 $\alpha_1$,所以這還不是一個復原機構. 但是,如果我們把這樣的兩個單元串聯起來,那末最

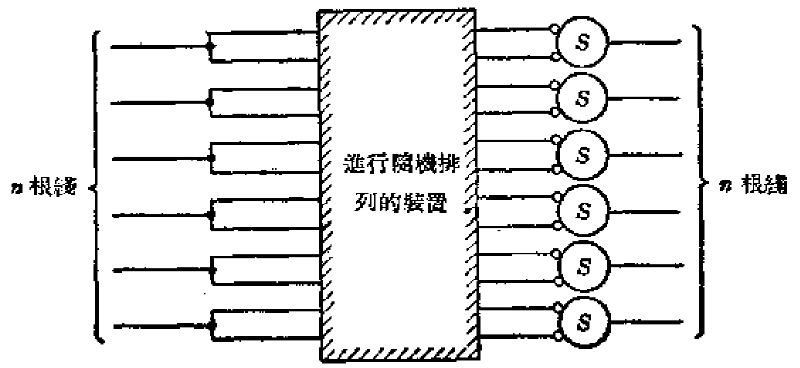



圖 18.8

後那些綫激發的概率 $\alpha_2$ 可以寫成

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1^2 = 1 - (1 - \alpha_0^2)^2 = 2\alpha_0^2 - \alpha_0^4. \tag{18.2}$$

由於以下的理由，可以知道串聯起來的兩個單元是一個復原機構，圖 18.9 表示出 $\alpha_0$ 和 $\alpha_2$ 之間的關係，當下面關係式成立的時候 $\alpha_2$ 等於 $\alpha_0$，

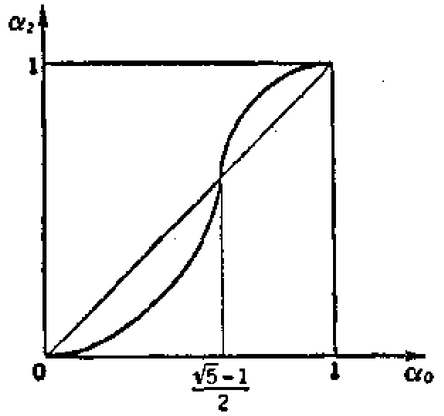



圖 18.9

$$\alpha_0^4 - 2\alpha_0^2 + \alpha_0 = 0,$$

或者說，$\alpha_0 = 0, \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$，或者 1. 所以，如果 $\alpha_0$ 在 0 和 $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ 之間，

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0.618034,$$

$\alpha_2$ 就比 $\alpha_0$ 小；如果 $\alpha_0$ 在 $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ 和 1 之間，$\alpha_2$ 就比 $\alpha_0$ 大，因此復原機構的作用在於使得輸出中激發綫的概率趨向 0 和 1，因此，就減小了執行機構所引起的誤差分散現象.

根據上面的討論的基礎，控制誤差的系統就是由包含 $n$ 個謝弗元件的一個執行機構和一個復原機構組成的，復原機構是由圖 18.7 表示的兩個單元（每個單元包括 $n$ 個謝弗元件和一個隨機排列的裝置）組成. 所以，對於每個謝弗元件都完全精確的情況，我們必須把系統擴大到包含 $3n$ 個謝弗元件. 我們看到，當給定了某個置信水平 $\delta$，給出輸入綫束中產生誤差的概率以及謝弗元件產生誤差的概率以後，用增加元件數目 $n$ 的辦法就可以使系統的可靠程度提高到我們所需要的任何程度. 所以，基本上，我們還是採用了把元件加多的原理. 但是我們在這一節裏的分析，給出怎樣把這些元件組合起來的辦法. 馮・諾伊曼把這種用許多不可靠的元件組合成一個非常可靠的系統的特殊方法，叫作"複合方法". 整個系統就稱爲"複合系統".

### 18.4 執行機構中的誤差

現在我們來計算由謝弗元件組合起來的複合系統的誤差，具體的組合情況上一節已經敍述過了. 現在我們來證明誤差的確受到了控制. 首先，我們看到，在執行機構或者復

原機構中,誤差的直接來源是每一個謝弗元件本身. 假設每個謝弗元件發生錯誤的概率是 $\varepsilon$. 假定有 $r$ 個並聯的謝弗元件,並且他們的運轉相互無關,因而系統中元件失效的概率仍然是 $\varepsilon$. 所以在 $r$ 個元件中,平均有 $\varepsilon r$ 個會發生錯誤,這個數目也是 $r$ 個並聯起來的元件中,最可能發生錯誤的數目,其它數目的元件發生錯誤的概率比較小. 實際上,由 $r$ 個元件並聯而成的系統中,如果每個元件失效的概率等於 $\varepsilon$,那末,決定有 $\rho$ 個元件發生錯誤的概率 $p_0(\rho,\varepsilon,r)$這種問題是隨機採樣的古典問題. 當 $r$ 很大的時候,已經知道[1]

$$p_0(\rho,\varepsilon,r)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)r}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(\rho-\varepsilon r)^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)r}}. \tag{18.3}$$

所以概率分佈 $p_0(\rho,\varepsilon,r)$是按平均值等於 $\varepsilon r$ 而方差等於 $\varepsilon(1-\varepsilon)r$ 的正態分佈.

執行機構中,誤差的另外一個來源是從輸入綫束到各個謝弗元件的那些綫配置不當而產生. 例如,圖 18.7 的輸入綫束 $a$ 中,如果激發綫的百分數等於 $\xi$;輸入綫束 $b$ 中,如果激發綫的百分數等於 $\eta$. 我們希望輸出綫束中有同樣百分數的抑制綫. 但是如果某 $i$ 個元件的輸入綫 $a_i$ 激發了,而 $b_i$ 未激發,甚至於元件的其它部分並沒有毛病,第 $i$ 個元件的輸出仍然是激發的情形. 用 $\zeta$ 表示執行機構的輸出綫束中激發綫所佔的百分數. 於是輸出綫束中實際的抑制綫有 $(1-\zeta)n$. $a$ 束中所有激發綫的數目等於 $\xi n$, 在 $b$ 束中等於 $\eta n$. 有效的數目,或者配置適當的數目, $a$ 束中只是$(1-\zeta)n$, 其餘 $[\xi-(1-\zeta)]n$ 根綫沒有生效. $b$ 束中沒有生效的數目是 $[\eta-(1-\zeta)]n$, 所以有效的輸出綫等於 $(1-\zeta)n$, 由於 $a$ 束中激發綫配置不當而有 $[\xi-(1-\zeta)]n$ 根輸出綫沒有生效,由於 $b$ 束中激發綫配置不當而有$[\eta-(1-\zeta)]n$ 根輸出綫沒有生效,最後由於未激發輸入綫而使輸出綫沒有生效的數目是

$$\{1-(1-\zeta)-[\xi-(1-\zeta)]-[\eta-(1-\zeta)]\}n=(2-\xi-\eta-\zeta)n.$$

因此,這一類輸出可能的有效組合的數目是[2]

$$\frac{n!}{[(1-\zeta)n]!\{[\xi-(1-\zeta)]n\}!\{[\eta-(1-\zeta)]n\}![(2-\xi-\eta-\zeta)n]!}.$$

另一方面,在輸入方面, $a$ 輸入綫束中有 $\xi n$ 根激發綫, $(1-\xi)n$ 根未激發綫,這 $n$ 根綫可能的組合數是

$$\frac{n!}{(\xi n)![(1-\xi)n]!},$$

$b$ 輸入綫束中,有 $\eta n$ 根激發綫, $(1-\eta)n$ 根未激發綫,這 $n$ 根綫可能的組合數是

$$\frac{n!}{(\eta n)![(1-\xi)n]!},$$

如果每一個謝弗元件是不發生毛病的理想元件,兩束輸入中激發綫的百分數分別是 $\xi$ 和 $\eta$, 而輸出中激發綫的百分數等於 $\zeta$ 的概率 $p_1$ 可以由下面公式得到

---

1) 可以參閱 H. Margenau and G. M. Murphy, "The Mathematics of Physics and Chemistry," p. 422. D. Van Norstrand Company. Inc., New York, 1943.

2) 參看 H. Margenau and G. M. Murphy 的書,第 415 頁.

$$p_1(\xi,\eta,\zeta;n)=\frac{\dfrac{n!}{[(1-\zeta)n]!\{[\xi-(1-\zeta)]n\}!\{[\eta-(1-\zeta)]n\}![(2-\xi-\eta-\zeta)]!}}{\dfrac{n!}{[\xi n]![(1-\xi)n]!}\quad\dfrac{n!}{[\eta n]![(1-\eta)n]!}}$$
$$=\frac{[\xi n]![(1-\xi)n]![\eta n]![(1-\eta)n]!}{[(1-\zeta)\eta]!\{[\xi-(1-\zeta)]n\}!\{[n-(1-\zeta)]n\}![(2-\xi-\eta-\zeta)n]!n!}. \tag{18.4}$$

很清楚，爲了使得計算有意義，前面一段討論過的四類輸出綫不能小於零，只要發生小於零的情況，概率就等於零．也就是說，只要違背了下述條件中的任何一個的時候，$p_1$ 就等於零，

$$\left.\begin{array}{l}1-\zeta>0,\\ \xi-(1-\zeta)>0,\\ \eta-(1-\zeta)>0,\\ 2-\xi-\eta-\zeta>0.\end{array}\right\} \tag{18.5}$$

我們將要在 $n$ 很大的假設下化簡方程(18.4)．當 $n$ 很大，由斯特靈 (Stirling) 公式，階乘(!)可以用它的漸近値表示

$$n!\approx\sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}. \tag{18.6}$$

利用方程(18.6)我們可以寫出 $p_1$ 的近似式

$$p_1(\xi,\eta,\zeta;n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\sqrt{a}\,e^{-\theta n}, \tag{18.7}$$

其中

$$a=\frac{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}{(\xi+\zeta-1)(\eta+\zeta-1)(1-\zeta)(2-\xi-\eta-\zeta)} \tag{18.8}$$

以及

$$\begin{aligned}\theta=&(\xi+\zeta-1)\log(\xi+\zeta-1)+(\eta+\zeta-1)\log(\eta+\zeta-1)\\&+(1-\zeta)\log(1-\zeta)+(2-\xi-\eta-\zeta)\log(2-\xi-\eta-\zeta)\\&-\xi\log\xi-(1-\xi)\log(1-\xi)-\eta\log\eta-(1-\eta)\log(1-\eta).\end{aligned} \tag{18.9}$$

把 $\theta$ 對 $\zeta$ 求微商，我們得到

$$\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}=\log\frac{(\xi+\zeta-1)(\eta+\zeta-1)}{(1-\zeta)(2-\xi-\eta-\zeta)}, \tag{18.10}$$

以及

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\zeta^2}=\frac{1}{\xi+\zeta-1}+\frac{1}{\eta+\zeta-1}+\frac{1}{1-\zeta}+\frac{1}{2-\xi-\eta-\zeta}. \tag{18.11}$$

由於這些方程我們找到在 $\zeta=1-\xi\eta$，$\theta=\dfrac{\partial\theta}{\partial\zeta}=0$．更進一步，因爲方程(18.5)的條件，$\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\zeta^2}$ 總是正數，所以 $\theta$ 只有一個零點在 $\zeta=1-\xi\eta$．於是假設 $n$ 很大，方程(18.7)中的負

冪說明我們只需要考慮 $\theta$ 在它的零點附近的情況就够了．但是，在 $\theta$ 的零點，$\zeta=1-\xi\eta$，

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\zeta^2}=\frac{1}{\xi(1-\eta)}+\frac{1}{\eta(1-\xi)}+\frac{1}{\xi\eta}+\frac{1}{(1-\xi)(1-\eta)}=\frac{1}{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}.$$

在 $\zeta=1-\xi\eta$ 的附近，$\theta$ 可以近似的寫成

$$\theta\sim\frac{1}{2}\frac{[\zeta-(1-\xi\eta)]^2}{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}. \tag{18.12}$$

$a$ 是 $\zeta$ 的函數，當 $n$ 很大的時候，它和方程 (18.7) 的指數比較起來是一個變化緩慢的函數．所以，我們可以取 $a$ 在點 $\zeta=1-\xi\eta$ 的值，或者

$$a\sim\frac{1}{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}. \tag{18.13}$$

因此，最後當 $n$ 很大時 $p_1(\xi,\eta,\zeta;n)$ 的近似表達式是

$$p_1(\xi,\eta,\zeta;n)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)n}}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{[\zeta-(1-\xi\eta)]^2n}{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}}. \tag{18.14}$$

所以 $p_1$ 也是 $\zeta$ 的正態分佈函數．

當 $n$ 很大的時候，我們來把概率表達式 $p_1(\xi,\eta,\zeta;n)$ 進行修改，而得到連續的分佈函數 $W(\zeta;\xi,\eta;n)$． 假設 $W(\zeta;\xi,\eta;n)d\zeta$ 表示輸出中激發綫的數目在 $\zeta n$ 與 $\zeta n+1=n(\zeta+1/n)$ 之間的概率，於是 $d\zeta=1/n$，而這個概率就等於 $p_1(\xi,\eta,\zeta;n)$．所以

$$W(\zeta;\xi,\eta;n)=np_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)/n}}\,e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\zeta-(1-\xi\eta)}{\sqrt{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)/n}}\right]^2}. \tag{18.15}$$

於是 $W(\zeta;\xi,\eta;n)$．$d\zeta$ 通常表示當輸入綫束中激發綫的百分數分別是 $\xi$ 和 $\eta$ 時，輸出綫束中激發綫的百分數在 $\zeta$ 和 $\zeta+d\zeta$ 之間的概率． 綫束的大小由綫數 $n$ 決定． $W$ 是一個平均值是 $1-\xi\eta$ 而方差等於 $\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)/n$ 的高斯分佈．可以用等價的方式表達這個結果，寫成

$$\zeta=(1-\xi\eta)+\sqrt{\frac{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}{n}}\,y, \tag{18.16}$$

其中 $y$ 表示一個隨機變量，這個變量的分佈是平均值等於 0，而方差等於 1 的標準高斯分佈．方程 (18.16) 表示 $\zeta$ 的分佈是平均值等於 $1-\xi\eta$ 而方差等於 $\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)/n$ 的高斯分佈． 所以方程(18.15)和方程(18.16)表示同一個事實，但是方程(18.16)用起來更加方便些．

我們現在把誤差的兩種來源合在一塊考慮，把各個不完善的謝弗元件的影響加到 $\zeta$ 的分佈函數方程(18.16)上．和方程(18.16)相似，方程(18.3)可以寫成

$$\rho=\varepsilon r+\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)r}\,y. \tag{18.17}$$

在執行機構中有兩類謝弗元件． 假定輸出是激發綫的 $n\zeta$ 個元件算一類． 發生一個錯誤就會把激發綫的數目減少一個．在這一類元件中 $q$ 個元件發生錯誤的概率由方程(18.17)給出

$$q = \varepsilon\zeta n + \sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)\zeta n}\, y. \tag{18.18}$$

此外,假定輸出是未激發的$(1-\zeta)n$個元件算作另一類. 一個錯誤將會增加一根激發輸出綫,這一類元件中有$q'$個發生錯誤的概率分佈是

$$q' = \varepsilon(1-\zeta)n + \sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)(1-\zeta)n}\, y, \tag{18.19}$$

所以$q'-q$表示由於元件本身的誤差使激發輸出綫增加的數目. 根據方程(18.18)和(18.19),我們得到

$$q'-q = 2\varepsilon\left(\frac{1}{2}-\zeta\right)n + \sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)(1-\zeta)n}\, y - \sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)\zeta n}\, y, \tag{18.20}$$

上面方程中最後兩項是兩個按照正態分佈的隨機變量的差. 我們可以證明兩個按正態分佈的隨機變量的差仍然是一個按照正態分佈的隨機變量.

考慮兩個按照正態分佈的隨機變量$z_1$和$z_2$,它們的平均值都是0,方差分別等於$\sigma_1^2$和$\sigma_2^2$,因而

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \sigma_1 y, \\ z_2 &= \sigma_2 y. \end{aligned}\right\} \tag{18.21}$$

或者,用$W_1(z_1)$表示$z_1$的概率分佈函數,$W_2(z_2)$表示$z_2$的概率分佈函數,

$$W_1(z_1) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{\sigma_1}\right)^2},$$

$$W_2(z_2) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_2}{\sigma_2}\right)^2}.$$

現在假設兩個隨機變量相互獨立,$z_1$在$z_1$與$z_1+dz_1$之間$z_2$在$z_2$與$z_2+dz_2$之間的聯合概率是

$$W_1(z_1)W_2(z_2)dz_1dz_2.$$

我們現在引入新的變量$x_1$和$x_2$,它們定義如下:

$$x_1 = z_1 - z_2,$$

$$x_2 = z_1 + z_2,$$

$$z_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),$$

$$z_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

新變量的聯合概率是

$$\frac{1}{2} W_1\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) W_2\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) dx_1\, dx_2.$$

把這個聯合概率從$-\infty$到$\infty$對$x_2$積分,我們就得到概率$W_1(x_1)dx_1$,其中$W_1(x_1)$是$x_1 = z_1 - z_2$的概率分佈函數. 這樣

$$W(x_1)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}W_1\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)W_2\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)dx_2$$
$$=\frac{1}{4\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1+x_2}{2\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{x_2-x_1}{2\sigma_2}\right)^2\right]}dx_2$$
$$=\frac{1}{4\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\frac{x_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}\frac{d\xi}{\sqrt{(1/8\sigma_1^2)+(1/8\sigma_2^2)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)^2}.$$

所以我們可以寫

$$z_1-z_2=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\,y. \tag{18.22}$$

把聯合概率對 $x_1$ 求積分，我們可以得到

$$z_1+z_2=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\,y, \tag{18.23}$$

因此兩個按正態分佈的相互獨立隨機變量，它們的和以及差仍然是按正態分佈的隨機變量，新概率分佈函數的方差等於原來兩個隨機變量的方差的和．按正態分佈而且平均值等於 0 的隨機變量相加或者相減所具有的這種特性是可以預料到的，因為它們對於正值和負值概率相等．

藉助於方程(18.22)的關係式，我們可以寫出方程(18.20)的結果

$$q'-q=2\varepsilon\left(\frac{1}{2}-\zeta\right)n+\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)n}\,y.$$

令 $(q'-q)/n=\Delta\zeta$ 表示對於不完善的謝弗元件所估的百分數 $\zeta$ 的修正量，我們就得到

$$\Delta\zeta=2\varepsilon\left(\frac{1}{2}-\zeta\right)+\sqrt{\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}}\,y, \tag{18.24}$$

現在我們可以把方程(18.16)與(18.24)結合起來，於是修正了的輸出綫中激發綫的百分數 $\zeta'$ 是

$$\zeta'=\zeta+\Delta\zeta=\zeta+2\varepsilon\left(\frac{1}{2}-\zeta\right)+\sqrt{\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}}\,y$$
$$=(1-\xi\eta)+2\varepsilon\left(\xi\eta-\frac{1}{2}\right)+(1-2\varepsilon)\sqrt{\frac{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}{n}}\,y$$
$$+\sqrt{\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}}\,y, \tag{18.25}$$

方程(18.25)的最後兩項表示兩個按正態分佈的隨機變量相加．這樣，我們也就可以用方程(18.23)了．所以，最後，用 $\zeta$ 代替 $\zeta'$，從方程(18.24)我們得到

$$\zeta=(1-\xi\eta)+2\varepsilon\left(\xi\eta-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\frac{(1-2\varepsilon)^2\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)+\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}}\,y, \tag{18.26}$$

其中 $y$ 是按正態分佈的隨機變量，平均值等於 0 而方差等於 1. 方程(18.26)描述了由謝弗元件組成的複合系統中執行機構的性質，這個系統中輸入激發綫的百分數分別是 $\xi$ 和 $\eta$，輸出激發綫的百分數是 $\zeta$，各個謝弗元件失效的概率等於 $\varepsilon$.

### 18.5 複合系統的誤差

分析了由謝弗元件組成的複合系統中執行機構的性質以後，我們進行其它的計算就非常容易了. 復原機構的每一個單元(圖 18.8)實際上等價於一個執行機構. 對於復原機構的第一個單元，輸入綫是把執行機構的輸出綫分開而成的. 所以我們可以只用同一個百分數 $\zeta$ 來代替兩個不同的百分數 $\xi$ 和 $\eta$，因此，假設 $\mu$ 是第一個單元輸出激發綫的百分數，於是根據方程(18.26)

$$\mu = (1-\zeta^2) + 2\varepsilon\left(\zeta^2 - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{(1-2\varepsilon)^2\zeta^2(1-\zeta^2)+\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}}\,y. \tag{18.27}$$

與此類似，假設 $\nu$ 是復原機構中第二個單元的輸出中激發綫的百分數，那末

$$\nu = (1-\mu^2) + 2\varepsilon\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{(1-2\varepsilon)^2\mu^2(1-\mu)^2+\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}}\,y. \tag{18.28}$$

方程(18.27)和(18.28)中，第一項的形式和方程(18.1)完全一樣. 附加項是由於不完善的元件以及從誤差的統計分佈所產生的.

只要給定了 $\xi, \eta, \zeta, \varepsilon$, 和 $n$ 時，我們就可以利用方程(18.26)到(18.28)來計算 $\nu$ 的分佈函數，$\nu$ 是謝弗元件組成的整個系統中輸出激發綫的百分數. 把表達式回復到原先的概率分佈函數形式. 我們可以看得比較清楚，例如，方程(18.26)等價於

$$W(\zeta;\xi,\eta;n) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\zeta - \left[(1-\xi\eta)+2\varepsilon\left(\xi\eta-\frac{1}{2}\right)\right]}{\sqrt{\frac{(1-2\varepsilon)^2\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)+\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}}}\right]^2\right\}}{\sqrt{2\pi\frac{(1-2\varepsilon)^2\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)+\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}}}.$$

只要把 $\zeta$, $\mu$ 和 $\nu$ 的聯合概率對 $\zeta$ 和 $\mu$ 求積分，於是我們就可以得到 $\nu$ 的概率分佈函數 $W(\nu;\xi,\eta;n)$，也就是

$$W(\nu;\xi,\eta;n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{(1-2\varepsilon)^2\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)+\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}}}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{\sqrt{\frac{(1-2\varepsilon)^2\zeta^2(1-\zeta)^2+\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}\;\frac{(1-2\varepsilon)^2\mu^2(1-\mu)^2+\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\zeta - \left\{(1-\xi\eta)+2\varepsilon\left(\xi\eta-\frac{1}{2}\right)\right\}}{\sqrt{\frac{(1-2\varepsilon)^2\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)+\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}}}\right]^2\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\mu-\left\{(1-\zeta^2)+2\varepsilon\left(\zeta^2-\frac{1}{2}\right)\right\}}{\sqrt{\frac{(1-2\varepsilon)^2\zeta^2(1-\zeta)^2+\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}}}\right]^2$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\nu-\left\{(1-\mu^2)+2\varepsilon\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)\right\}}{\sqrt{\frac{(1-2\varepsilon)^2\mu^2(1-\mu)^2+\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}}}\right]^2\Bigg\}. \tag{18.29}$$

我們現在可以證明在適當的條件下，如果 $n$ 增大，那末由謝弗元件組成的系統就能够具有合乎理想的性質. 考慮一個給定的置信水平 $\delta$，如果兩束輸入綫束中激發綫所佔的百分數分別用 $\xi$ 和 $\eta$ 表示，$\nu$ 表示輸出綫束中未激發綫所佔的百分數，要求系統具有理想的性質就必須有：$\xi \geq 1-\delta$，並且 $\eta \geq 1-\delta$ 時，有 $\nu \leq \delta$；以及當 $\xi \leq \delta$ 並且 $\eta \geq 1-\delta$ 時，或者當 $\xi \geq 1-\delta$，並且 $\eta \leq \delta$ 時，$\nu \geq 1-\delta$；以及 $\xi \leq \delta$，並且 $\eta \leq \delta$ 時 $\nu \geq 1-\delta$. 我們假定 $n$ 相當大，$\varepsilon$ 相當小，以至於方程(18.26)到(18.28)中數量級與 $\varepsilon$ 和 $1/\sqrt{n}$ 相同的項都可以略去不計. 於是就有

$$\zeta \approx (1-\xi\eta), \qquad \mu \approx 1-\zeta^2, \qquad \nu \approx 1-\mu^2.$$

或者當 $n \gg 1$，$\varepsilon \ll 1$ 時，

$$\nu \approx 1-(2\xi\eta-\xi^2\eta^2). \tag{18.30}$$

現在令 $\xi = 1-\alpha$，$\eta = 1-\beta$，並且 $\alpha, \beta \leq \delta$；這樣 $\xi \geq 1-\delta$，$\eta \geq 1-\delta$，於是方程(18.30)給出

$$\nu \approx 2(\alpha^2+\beta^2)+\cdots.$$

因此 $\nu = 0(\delta^2)$[1]. 與此類似，如果 $\xi \leq \delta$，而 $\eta \geq 1-\delta$，或者 $\xi \geq 1-\delta$，$\eta \leq \delta$，方程(18.30)給出 $\nu = 1-0(\delta^2)$. 更進一步，如果 $\xi \leq \delta$，$\eta \leq \delta$ 方程也給出 $\nu = 1-0(\delta^4)$. 所以，只要 $\varepsilon$ 和 $\delta$ 很小，當 $n \to \infty$ 時，由謝弗元件按復合法組成的系統就能真正得到極爲可靠的性質.

當 $n$ 很大但並不是無窮大時，因爲要計算方程(18.29)中的積分值，計算起來就非常麻煩. 雖然積分的漸近值可以用古典的方法决定，但是在這裏我們不來進行這種計算了. 我們將引用馮・諾伊曼所舉出過的一個例子：如果 $\delta = 0.07$，也就是綫束中至少有百分之九十三的激發綫就表示一個"正"的信息；至多有百分之七的激發綫就表示一個"負"的信息. 這時，他發現，爲了控制誤差，每一個謝弗元件失靈的概率 $\varepsilon$ 必須比 0.0107 小. 如果 $\varepsilon \geq 0.0107$，整個系統失靈的概率不可能由於 $n$ 的增加而變得任意小，對於 $\varepsilon = 0.005$，或者說失效的機會是 0.5% 的情形，馮・諾伊曼給出了表 18.1 的數值結果. 從這個表裏可以看到，甚至於綫束包含了 1000 根綫，可靠的性能仍然非常差. 實際上，它比原來的 $\varepsilon = 1\%$ 還要差，但是把 $n$ 再增加 25 倍以後，就可以得出極爲可靠的性能.

1) $0(\delta^2)$ 表示一個與 $\delta^2$ 同數量級的變量.

對於那些本來由謝弗元件組成的系統，前面討論過的複合法的技巧也還可以照樣應用。我們用 $3n$ 個謝弗元件代替原來系統中的每一個謝弗元件。像前面討論的情形那樣，整個系統的誤差可以通過系統中各個謝弗元件的誤差計算出來。實際上，這種計算非常麻煩。可是，爲了估計達到規定的可靠性所需要的元件數目 $n$，我們可以認爲整個系統等價於一個謝弗元件，而直接用整個反應的結果。這種作法將在下一節裏討論。

表 18.1

$\delta = 0.07$　　$\varepsilon = 0.005$

| 綫的數目 $n$ | 失靈的概率 |
|---|---|
| 1,000 | $2.7\times 10^{-2}$ |
| 2,000 | $2.6\times 10^{-3}$ |
| 3,000 | $2.5\times 10^{-4}$ |
| 5,000 | $4\times 10^{-6}$ |
| 10,000 | $1.6\times 10^{-10}$ |
| 20.000 | $2.8\times 10^{-19}$ |
| 25,000 | $1.2\times 10^{-23}$ |

## 18.6　一些例子

爲了得到關於所要求綫束大小的一個概念，我們考慮有 2,500 個眞空管的一個計算機，假設每一個眞空管平均 5 微秒開動一次。我們要求機器在發生一個錯誤以前平均工作 8 個小時。在這段時期內，單獨一個眞空管作用的次數是

$$\frac{1}{5} \times 8 \times 3{,}600 \times 10^{6} = 5.76 \times 10^{9}.$$

把每個眞空管當做一個謝弗元件，考慮每一個眞空管是一個獨立的單元，於是所要求發生失靈的概率是 $1/(5.76 \times 10^{9})$。但是系統裏有 2,500 個眞空管，2,500 個眞空管中任何一個發生錯誤都意味着機器發生錯誤。所以考慮每個眞空管是系統裏的一個單元，發生失靈的概率只是前面談到的 1/2,500，或者 $1/2{,}500 \times 5.76 \times 10^{9} = 7 \times 10^{-14}$。於是我們看到，這個發生失靈的概率等於把 2,500 個眞空管的系統當成一個謝弗元件而得到的概率。在用複合法組成的系統中，這樣做法可以大大的簡化，關於要求的綫數 $n$ 的分析。

如果我們假定置信水平 $\delta$ 以及眞空管失效的概率和表 18.1 內所給定的相同，那末，根據這個表，要達到上述的失靈概率需要 $n = 14{,}000$。所以，爲了使得機器像所要求的那樣可靠，需要複合 14,000 次。這表示要用有 $3n = 3 \times 14{,}000 = 42{,}000$ 個眞空管的系統去代替機器中每一個眞空管。原來 2,500 個眞空管的機器現在變成 105,000,000 個眞空管的龐然大物。很顯然這是不實際的。

現在討論另外一個例子，我們考慮關於人類神經系統組織的合理的數量描述。神經系統所包含神經節的數目，通常認爲是 $10^{10}$。但是考慮到感受的神經末梢以及其它可能的更小的自主的單元，這個數目當然是太少了，必須還要大幾百倍才對。我們就取 $10^{13}$ 爲基本元件的數目，神經節在每秒鐘裏頂多能承受 200 次刺激。但是每秒受到刺激的平均數要少得多，比如說每秒 10 次。我們將要進一步假定我們的神經系統裏發生一個錯誤就相當嚴重，因而在人的一生中都不應當發生錯誤。考慮不發生誤差的間隔是 10,000 年，在這段時期內，包括 $10^{13}$ 個元素的系統受到的總刺激數的數目是

$$10^{13} \times 10{,}000 \times 31\,536{,}000 \times 10 = 3.2 \times 10^{25}.$$

於是失靈的概率應該是

$$1/(3.2 \times 10^{25}) = 3.2 \times 10^{-26}.$$

再假定那些基本的神經節元件有表 18.1 敍述的性質；於是從表內推出 $n = 28,000$.

但是需要修正我們的分析：假設人類的神經系統眞正復合 28,000 次，那末在未復合的系統中基本元件的數目並非上面假定的 $10^{13}$；基本元件的數目將要縮減到 $10^{13}/(3 \times 28{,}000)$，因此，失靈的概率應該增加 $3 \times 28{,}000$ 倍，修正後失靈的概率是 $2.7 \times 10^{-21}$，於是表 18.1 給出 $n = 22,000$. 再重復下去，這個値將不會改變了.

這些例子說明，控制誤差的複合方法雖然我們可以想像對於神經系統的微小"元件"的情形可以應用，但是在現在工藝情況下，這種方法對於工程系統的應用還是很不實際的. 將來一個明顯的發展方向是減小元件的體積和功率. 從這個觀點出發，半導體製成的晶體管比起眞空管來有了巨大的改進，因此複合方法將來也許能變爲實際可用. 另外一個研究的方向是更加深入的分析控制誤差的過程. 對於謝弗元件，我們的基本系統裏，執行機構和復原機構的組織方式畢竟只是一種可能的組織方式. 很幸運地，在證明增加可靠性的可能性方面我們已經獲得了這一個初步的成功. 當然也還可能有另外一種把很多元件組合起來的辦法. 利用那種方法仍然可以產生同樣的可靠性能，而元件的數目比較少. 莫爾 (E. F. Moore) 和申南[1] (C. E. Shannon) 曾經把繼電器當作基本元件，採用一種與複合法不相同的組合方法來組成另一個"大"繼電器，他們證明：爲了得到一個可靠的"大"繼電器所需要的繼電器的數目可以大大地減少. 例如，在同樣的條件下用馮·諾伊曼的方法需要的元件數目是 60,000，可是用他們提出的新方法只要 100 個元件就可以得到同樣的可靠性. 莫爾和申南並且給出達到某個規定的可靠性所至少需要的元件數目. 總而言之，自動控制系統中誤差的控制問題的研究還僅僅是一個開始. 對於控制工程師而言，關於誤差的控制問題仍然還沒有切實可用的解決方法.

1) E. F. Moore, C. E. Shannon, Reliable Circuits Using Less Reliable Relays *J. Franklin Inst.* **262** No. 3, No. 4, p. 191—208, p. 281—297 (1956).

# 俄 文 文 献


[1] Андрнов А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, М.—Л., 1937.
[2] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения М.—Л., 1945, 2 изд.
[3] Четаев Н. Г., Устойчивость движения, М.—Л., 1955.
[4] Дубошин Г. Н., Основы теории устойчивости движения, изд-во МГУ, 1952.
[5] Труды II—го Всесоюзново Совещания по теории и методам автоматического регулирования т, I, II, III, АН СССР, 1955.
[6] Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматическово регулирования, М.—Л., 1951.
[7] Летов А. М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем М.—Л., 1955.
[8] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений М.—Л., 1941.
[9] «Основы автоматического регулирования», сб. под ред. В. В. Солодовникова М., 1954.
[10] Конторович М. И., Операционное исчиление и нестанционарные явления в электрических цепях, М.—Л., 1949.
[11] Лурье А. И., Операционное исчисление, М.—Л., 1950.
[12] Диткин В. А., Кузнецов П. И., Справочник по операционному исчислению, М.—Л., 1951.
[13] Бугаков Б. В., Колебания, М.—Л., 1954.
[14] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексново пременного, М.—Л., 1951.
[15] Гарднер и Бернс, Переходные процессы в линейных системах М., 1950.
[16] Джеймс Х, Никольс Н, Филлипс Р., Теория следящих систем, М., 1951.
[17] Воронов А. А., Элементы теории автоматического регулирования, М., 1951.
[18] Солодовников В. В., Топчеев Ю. И., Крутикова Г. В., Частотных метод построения переходных процессов, М.—Л., 1955.
[19] Остославский И. В., Калачев Г. С., Продольная устойчизость и управляемость самолета, М., 1951.
[20] Закс Н. А., Основы экспериментальнойародинамики, М., 1953.
[21] Сикорд Ч., Вопросы ракетной техники, № 6, 78—96 1952,
[22] Цыпкин Я. З., Автоматика и телемеханика, № 2—3, 107—128 1946.
[23] Цыпкин Я. З., Бромберг П. В., Изв. АН СССР, № 12, 1163—1168 1945.
[24] Курош А. Г., Курс высшей алгебры М.—Л., 1952.
[25] «Корректирующие цепи в автоматике», сб. статей, М., 1954.
[26] Уиттекер, Ватсон, Курс современного анализа, М.—Л., 1933.
[27] Фельдбам А. А., Электрические систем автоматического регулирования М., 1954.
[28] Крылов А. Н., Соч., АН СССР, т. V.
[29] Кочин Н. Е., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, М.—Л., 1938.
[30] Мур Дж. Р. и др., Следящие и авторегулируемые систем, отличающиеся от обычных систем с обратной связью, Прикл. мех. и машиностр., сб. пер., № 5, 1953.
[31] Вознесенский И. И., За советское энергооборудование, сб. статей, 1934.
[32] Айзерман М. А., Теория автомачеккого регулирования двигателей, М.—Л., 1952.
[33] Айзерман М. А., Введение в динамику автоматического регулирования двигателей, М., 1950.
[34] Маккол Л. А., Основы теории сервомеханизмов, М., 1947.
[35] Боголюбов Н. Н., Онекоторых статических методах в математической физике, АН УССР, 1945, стр. 7.
[36] Красовский А. А., Автоматика и Телемеханека, 9, 1. 1948.
[37] Поспелов Г. С., Труды ВВА им. Жуковского, вып. 335, 1949.
[38] Попов Е. П., Динамика сестем автоматического регулирования, М.—Л., 1954.
[39] Гольдфарб Л. С., Автоматика и телемеханика, № 5, 349; № 6, 413, 1948.

[40] «Автоматическое регулирование», сб. статей, М., 1954.
[41] Цыпкин Я. З., Переходные и установшиеся процессы в импульсных цепях, М., 1951.
[42] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, Изд-го МГУ, 1954.
[43] Ведров В. С., Динамическая устойчивость Самолета, М., 1938.
[44] Фельдбаум А. А., Автоматика и телемеханика, № 4, 1949.
[45] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, М.—Л., 1937.
[46] Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, М., 1952.
[47] Фельдбам А. А., Автоматика и телемеханика, № 6, 1953.
[48] Фельдбам А. А., Автоматика и телемеханика, № 2, 1955.
[49] Льюис., Нелейных обратных связи, Впроссы ракетной техники, № 4, 1954.
[50] Булгаков Б. В., Прикладная теория гироскопов, М 1954, 2 изд.
[51] Мак-Лахлан Н. В., Теория и приложения функций Матьё, М., 1953.
[52] Россер Дж., Ньютон Р. и Гросс Г., Математическая теория полета неправляемых ракет, М., 1950.
[53] Ренкин Р. А., Математическая теория движения неуправляемых ракет М., 1951.
[54] Гантмахер Ф. Р., Левин М. Л., Прикл. матем. и мех., т. X, 301—312, 1947.
[55] Дренин Р., Вопроссы ракетной техники, сборник переводсв, М., 5, 1952.
[56] Фельбаум А. А., Автоматика и телемеханика, IX, вып. 1, 3—19, 1948.
[57] Уланов Г. М., Автоматика и телемеханика, IX, вып. 3, 168—175, 1948.
[58] Красовский А. А., Труды ВВА им. Жуковского, вып. 281, 1948.
[59] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления М.—Л., 1938.
[60] Автоматы СБ. статей, под ред К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, изд. и-л. Москва 1956.

# 索　引

## 七 劃



## 八 劃



## 九 劃

## 十 三 劃



## 十 四 劃



## 十 五 劃



## 十 六 劃



## 十 七 劃

### 十八劃



### 十九劃



### 二十劃



### 二十一劃



### 二十三劃